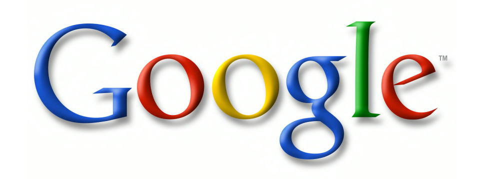



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1880.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES AU LYCÉE FONTANES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DIX-NEUVIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1880.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION, EN 1879, A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. REMARQUES GÉOMÉTRIQUES;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

et un point M *sur cette conique. Par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point* M, *on fait passer un cercle. Prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique* (K) *passant par l'origine* O *des axes.*

Occupons-nous d'abord de cette première partie de la question proposée.

Désignons par (M) la conique donnée. Prenons le point M′, symétrique de M par rapport à l'axe des x, et le point M″, symétrique de M par rapport à l'axe des y. La circonférence circonscrite au triangle MM′M″ a pour centre le point O. Ce point appartient alors à la courbe (K).

Le diamètre M′M″ étant le seul qui conduise à ce point du lieu, le point O est un point simple de la courbe (K).

Sur une droite quelconque issue du point O, et en outre de ce point, on a encore un point du lieu : on l'obtient au moyen du diamètre perpendiculaire à cette droite. Une droite issue du point O rencontre donc la courbe (K) en O et en un autre point : donc (K) *est une conique passant par* O.

Au diamètre infiniment voisin de M′M″ correspond un point de (K), infiniment voisin de O et situé sur la perpendiculaire élevée en O à ce diamètre. Donc :

La tangente en O *à la conique* (K) *est perpendiculaire à* OM′, *ou encore* OM′ *est la normale en* O *à la conique* (K).

Prenons un diamètre quelconque CC′ de (M) et élevons en O une perpendiculaire à ce diamètre. Appelons c le point de la conique (K) qui est situé sur cette perpendiculaire : ce point c est à la rencontre de cette droite et de la perpendiculaire élevée à MC par le point γ, milieu de cette corde.

Cherchons quel est sur γc l'autre point de la conique (K).

Menons le diamètre EE′, tel que OE et MC soient également inclinées sur les axes de (M). En vertu d'un théorème bien connu, la circonférence, qui contient les points M, E, E′, contient aussi le point C. Le centre e de cette circonférence est le point cherché. Les droites oe, γc, respectivement perpendiculaires à OE et MC, sont aussi également inclinées sur les axes de (M). Il résulte de là que :

Le point e, où la droite γc rencontre (K), *est le milieu du segment intercepté sur cette droite par les axes de* (M).

Nous sommes ainsi conduits à cette deuxième génération de (K) :

La conique (K) *est le lieu des milieux des seg-*

ments, interceptés par les axes de (M), *sur les perpendiculaires élevées aux milieux des cordes de cette conique qui partent du point* M.

Lorsque l'extrémité de la corde issue du point M vient se confondre avec M, alors la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde est la normale en M à (M). Le milieu n du segment intercepté par les axes sur cette normale est alors un point de (K).

Le point γ, milieu de la corde MC, est aussi le milieu du segment intercepté sur cette droite par les asymptotes de (M). On a alors cette troisième génération de (K) :

La conique (K) *est le lieu des milieux des segments interceptés par les axes de* (M) *sur les perpendiculaires élevées aux milieux des segments, déterminés par les asymptotes de cette courbe, sur les droites issues de* M.

On peut remarquer que cette troisième génération peut être énoncée en n'employant que des droites et le point M, sans faire intervenir la conique (M).

Cherchons les points de rencontre de (K) avec les axes. Nous n'avons pour cela, en employant la première génération de (K), qu'à construire les points qui correspondent aux axes au moyen de ce théorème :

La circonférence, qui passe par les extrémités d'un axe d'une conique (M) *et par un point* M *de cette courbe, passe aussi par le pied* P *de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de* (M) *sur la tangente en* M *à* (M) [1].

---

[1] J'ai déjà employé ce théorème l'année dernière, à propos de la composition d'admission à l'École Polytechnique (voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878, p. 413). Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier du théorème suivant, dû à M. Laguerre : *La circonférence passant par les pieds* A_1, A_2, A_3 *des trois normales abaissées d'un point* P *sur une conique de centre* O *qui, d'après le théorème de Joachimstahl, passe par le point* A'_4 *de la conique diamétra-*

Le centre de cette circonférence est sur l'un des axes et sur la perpendiculaire à PM, élevée du milieu de ce segment. On a donc les points b et a de (K), situés sur les axes Ox et Oy, en prenant les points de rencontre de ces axes avec la perpendiculaire à PM, élevée au milieu de ce segment. Remarquons tout de suite que cette perpendiculaire passe par le point H, milieu de OM.

Il résulte de la construction de a et de b que ces points sont les milieux des segments compris entre O et les points où la normale Mn rencontre les axes.

Les points o, a, n, b sont alors les sommets d'un rectangle inscrit dans (K); donc :

Les axes de la conique (K) *sont parallèles aux axes de la conique* (M), *et le centre de* (K) *est le milieu du segment ab.*

On déduit de là que, si l'on prend les segments compris entre M et deux sommets opposés de (M), les perpendiculaires élevées aux milieux de ces segments, les parties de ces droites interceptées par les axes ont pour points milieux des sommets de (K).

On voit facilement de là que :

Après avoir tourné d'un angle droit sur son plan, la conique (K) *est homothétique à* (M).

Les longueurs des axes de la conique (K) *sont indépendantes de la position de* M *sur* (M), *ou encore les coniques* (K) *relatives aux différents points de* (M) *sont égales entre elles,* c'est-à-dire que, *lorsque* M *décrit* (M), *la conique* (K), *invariable de grandeur, se*

---

lement opposé au pied A_4 *de la quatrième normale, qu'on peut abaisser de* P, *passe aussi par le pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur la tangente à la conique au point* A'_4 [*Sur la développée de l'ellipse* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 29 janvier 1877). *Voir* aussi dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV, septembre 1878, un article de M. Gohierre de Longchamps].

transporte parallèlement à elle-même sans cesser de passer par le point O.

Pour construire un point de (K), au moyen de la première génération de cette courbe, prenons une asymptote de (M). A cette droite correspond un point de (K), situé sur une perpendiculaire à cette asymptote; donc :

Les asymptotes de (K) *sont perpendiculaires aux asymptotes de* (M).

Comme conséquence, nous voyons que :

Les coniques (K) *et* (M) *sont de la même nature et, si* (M) *est une hyperbole équilatère,* (K) *est aussi une hyperbole équilatère.*

Nous connaissons maintenant la conique (K) de forme et de position; nous pouvons alors prendre la suite de la question proposée.

Si autour du point O *on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique* (K) *en deux points; prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpendiculaire au segment* OM *et passant par le milieu de ce segment.*

Le lieu dont il est question dans cette partie de l'énoncé n'est autre que la polaire d'un point F par lequel passent, en vertu du théorème de Frégier, les hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans (K) et qui ont O pour sommet commun de leur angle droit.

Ce point F est le point de rencontre de l'hypoténuse *ab* du triangle *a*O*b* et de OM′, qui est normale en O à (K). Cherchons alors la polaire du point F.

Les droites OM, OM′, étant également inclinées sur les côtés de l'angle droit *aob*, déterminent, avec les côtés *oa*, *ob* de cet angle, quatre droites qui forment un faisceau harmonique. Ces quatre droites donnent, sur la

transversale ab, les quatre points a, F, b, H qui forment une division harmonique. Le point H est conjugué harmonique de F, par rapport aux points a et b; donc :

La polaire du point F *passe par le point* H, *milieu de* OM.

Le point F étant sur le diamètre ab, sa polaire est parallèle à la tangente en b à la conique (K). Cette tangente et la tangente en O à cette conique sont également inclinées sur les axes et, comme la tangente en O est perpendiculaire à OM′, la tangente en b est perpendiculaire à OM.

La polaire du point F *est donc la perpendiculaire à* OM *au milieu* H *de ce segment.*

Prenons la fin de l'énoncé de la question :

Par le point O, *on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point* O, *trois autres droites normales à la conique* (K).

1° *Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où l'on a* $A = 1$ *et* $B = 1$, *montrer qu'une seule normale est réelle et calculer les coordonnées de son pied.*

2° *Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.*

Je laisse de côté cette dernière partie, purement analytique, que l'on résout généralement dans les cours, et je vais simplement dire un mot relatif au cas où (M) est une hyperbole équilatère.

D'après ce que nous avons démontré, (K) est alors aussi une hyperbole équilatère, et il est facile de construire les axes de cette courbe et de calculer leurs longueurs.

Joignons le point O au centre I de l'hyperbole (K). Sur OI comme diamètre décrivons une circonférence de cercle. Cette courbe rencontre (K) au point L; appe-

lons L′ le point qui sur (K) est diamétralement opposé à L.

Le triangle L′LO, inscrit dans l'hyperbole (K), est rectangle en L ; son hypoténuse, en vertu du théorème de Frégier, dont nous avons déjà fait usage, est parallèle à la normale en L à (K). Mais les normales en L et L′ à cette courbe sont parallèles entre elles : donc la droite OL′ est normale à l'hyperbole (K).

Le calcul des coordonnées du pied de cette normale est ainsi ramené au calcul des coordonnées du point de rencontre L de (K) et de la circonférence décrite sur OI comme diamètre ; car, connaissant les coordonnées de L, on a tout de suite les coordonnées de L′.

Pour terminer, je vais indiquer, sans démonstration, encore quelques remarques :

La tangente en n à la conique (K) *passe par le milieu du segment intercepté par les axes sur la tangente en* M *à la conique* (M).

Lorsque la corde MC tourne autour de M, les droites telles que γc enveloppent une courbe (S).

Le point de contact s de (S) *et de γc est sur la normale en* C *à la courbe* (M).

La courbe (S) *touche la normale* M*n au point* μ, *qui est le centre de courbure de* (M) *sur cette droite.*

Les axes interceptent sur γc un segment dont le milieu est le point *e* de (K). Pour construire la tangente en *e* à cette courbe, on opère ainsi :

On mène la droite *os*. On joint le point *e* au milieu de *os*, la symétrique de cette droite, par rapport à la bissectrice de l'angle S*eo*, est la tangente demandée.

Cette construction, appliquée au point *n*, établit une liaison entre le centre de courbure μ et la tangente en *n* à (K).

Puisque nous connaissons cette tangente, nous pou-

vons déterminer ρ. On arrive ainsi à la construction suivante :

Le point O et les points où la normale Mn rencontre les axes sont les trois sommets d'un rectangle ; du quatrième sommet de ce rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur OM : cette droite coupe Mn au centre de courbure ρ.

SUR LA RÉDUCTION DES POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ HOMOGÈNES A DES SOMMES DE CARRÉS;

PAR M. H. LAURENT.

Le but de cette Note est surtout l'étude d'une équation remarquable que l'on rencontre dans un grand nombre de questions d'Analyse, et principalement en Géométrie analytique, dans la recherche des axes des courbes et des surfaces du second ordre, dans la recherche de leurs diamètres conjugués parallèles, dans la recherche de leurs intersections, etc. Cette étude est plus simple et plus complète que celles qui ont été faites jusqu'ici.

Pour l'intelligence des questions qui vont suivre, il faut savoir que l'on appelle *substitution orthogonale* tout changement de variable de la forme

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\ x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots + \gamma_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dans lequel les coefficients γ_{ij} satisfont aux relations

$$\Sigma \gamma_{i\mu} \gamma_{i\nu} = 0, \quad \Sigma \gamma_{i\mu} \gamma_{i\mu} = 1.$$

Quand on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par leurs valeurs (α),

la fonction $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ devient $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$. Tel est le caractère des substitutions orthogonales.

Les changements de coordonnées dans lesquels les anciens et les nouveaux axes sont rectangulaires sont des substitutions orthogonales.

RÉDUCTION D'UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ A UNE SOMME DE CARRÉS PAR UNE SUBSTITUTION ORTHOGONALE.

On peut ramener le polynôme $f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ à n variables à une somme de n carrés, au moyen d'une substitution orthogonale. Effectuons, en effet, la substitution orthogonale à coefficients indéterminés

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\ x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots + \gamma^2{}_n y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \gamma_{n1} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n, \end{cases}$$

où nous supposons

$$(2)\qquad \gamma_{1\mu}^2 + \gamma_{2\mu}^2 + \ldots + \gamma_{n\mu}^2 = 1,$$

$$(2\ bis)\qquad \gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\mu}\gamma_{2\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu} = 0,$$

la fonction f prendra la forme

$$f = \Sigma a_{ij}(\gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \ldots + \gamma_{i\mu} y_\mu + \ldots)(\gamma_{j1} y_1 + \ldots + \gamma_{j\nu} y_\nu + \ldots),$$

ou bien

$$f = + \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{i\nu} y_\mu y_\nu + \ldots + \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} y_\mu^2 + \ldots.$$

Si l'on pose alors

$$(3)\qquad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0 \quad \text{pour } \mu \gtrless \nu,$$

$$(4)\qquad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = A_\mu,$$

la fonction f prendra la forme d'une somme de carrés

$$(5)\qquad f = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \ldots + A_n y_n^2.$$

Il reste à prouver que l'on peut satisfaire aux équations (2) et (3), qui sont au nombre de

$$\frac{n(n-1)}{2} + n + \frac{n(n-1)}{2} = n^2,$$

comme les inconnues γ_{ij}. Or, si l'on appelle $f_1(x_1, x_2, \ldots)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots)$, ... les demi-dérivées de $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ prises par rapport à x_1, x_2, ..., en sorte que

$$f_i(x_1, x_2, \ldots) = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n,$$

les formules (3) pourront s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{1\mu}(a_{11}\gamma_{1\nu} + a_{12}\gamma_{1\nu} + \ldots + a_{1n}\gamma_{n\nu}) \\ + \gamma_{2\mu}(a_{21}\gamma_{1\nu} + a_{22}\gamma_{2\nu} + \ldots + a_{2n}\gamma_{n\nu}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0,$$

ou

$$\gamma_{1\mu} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) + \gamma_{2\mu} f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) + \ldots = 0.$$

La comparaison de ces équations, où l'on peut supposer ν fixe, avec les équations (2 *bis*), où l'on supposera aussi ν fixe, donnera

$$(6) \quad \frac{f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{\gamma_{1\nu}} = \frac{f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{\gamma_{2\nu}} = \ldots = \frac{f_n(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{\gamma_{n\nu}}.$$

Ces équations sont plus faciles à traiter que les équations (3) et (2 *bis*), et pour les résoudre nous supposerons ν fixe; omettant alors pour le moment cet indice, qui complique la notation, et introduisant l'inconnue auxiliaire s, nous poserons

$$s = \frac{f_1(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)}{\gamma_1} = \frac{f_2(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)}{\gamma_2} = \ldots$$
$$= \frac{f_n(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)}{\gamma_n},$$

d'où nous déduirons

$$f_1 - \gamma_1 s = 0, \quad f_2 - \gamma_2 s = 0, \quad \ldots, \quad f_n - \gamma_n s = 0,$$

ou bien, en remplaçant $f_1, f_2, \ldots$ par leurs valeurs

$$(7)\quad \begin{cases} (a_{11}-s)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-s)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-s)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

A ces formules il faut adjoindre, pour achever de déterminer les $\gamma_{i\nu}$, l'équation (2), qui, en omettant l'indice ν, devient

$$(8)\qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \ldots + \gamma_n^2 = 1.$$

Si nous éliminons les γ entre les équations (7), nous aurons

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en appelant $F(s)$ le premier membre de cette équation

$$(9\ bis)\qquad F(s) = 0.$$

L'équation $F(s) = 0$ est du degré n; si elle a ses n racines distinctes, en les appelant $s_1, s_2, \ldots, s_\nu, \ldots, s_n$, chacune de ces racines, portée dans le système (7), (8), fera connaître un système de valeurs des quantités $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, et le problème que nous avons en vue sera résolu. Mais il convient de soumettre cette solution à une discussion approfondie. L'équation $F(s) = 0$ est ce que l'on appelle l'*équation en s*.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN s.

(Nous continuerons le numérotage des formules commencé au paragraphe précédent.)

Le polynôme $\Sigma a_{ij}x_i x_j$ sera supposé à coefficients réels. Cela posé :

Théorème I. — *L'équation en s a toutes ses racines réelles.*

Voici la première et la meilleure démonstration qui ait été donnée de ce théorème; elle est extraite de la *Mécanique analytique* de Lagrange, qui a rencontré pour la première fois l'équation en s dans l'étude du mouvement de rotation des solides.

Si l'équation $F(s) = 0$ avait des racines imaginaires, elle en aurait au moins deux conjuguées s_μ et s_ν, les valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ correspondantes, tirées de (7) et (8), étant désignées par $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots, \gamma_{n\mu}$ et $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}$; on aurait, en vertu de ces formules (7),

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} (a_{11} - s_\mu)\gamma_{1\mu} + a_{12}\gamma_{2\mu} + \ldots + a_{1n}\gamma_{n\mu} = 0, \\ a_{21}\gamma_{1\mu} + (a_{22} - s_\mu)\gamma_{2\mu} + \ldots + a_{2n}\gamma_{n\mu} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\gamma_{1\mu} + a_{n2}\gamma_{2\mu} + \ldots + (a_{nn} - s_\mu)\gamma_{n\mu} = 0; \end{array}\right.$$

multipliant la première par $\gamma_{1\nu}$, la seconde par $\gamma_{2\nu}$, ... et ajoutant, on a

$$\begin{array}{l} a_{11}\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + a_{21}(\gamma_{2\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\nu}\gamma_{1\mu}) + \ldots \\ \quad = s_\mu(\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}); \end{array}$$

on trouverait d'une façon analogue

$$\begin{array}{l} a_{11}\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + a_{21}(\gamma_{2\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\nu}\gamma_{1\mu}) + \ldots \\ \quad = s_\nu(\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}), \end{array}$$

d'où, par soustraction,

$$(s_\mu - s_\nu)(\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\mu}\gamma_{2\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}) = 0;$$

mais s_μ et s_ν étant conjugués sont différents l'un de l'autre; de plus, $\gamma_{1\mu}$ et $\gamma_{1\nu}$, $\gamma_{2\mu}$ et $\gamma_{2\nu}$, ... sont des imaginaires conjuguées : donc ni $s_\mu - s_\nu$, ni l'autre facteur $\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}$, ne peuvent être nuls [en effet, $\gamma_{1\mu}$

et $\gamma_{i\nu}$ étant conjugués, leur produit est le carré du module de $\gamma_{i\mu}$, etc. Pour que $\Sigma\gamma_{i\mu}\gamma_{i\nu}$ fût nul, il faudrait que $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\mu}$ le fussent, ce qui est absurde, puisque, en vertu de (8), $\Sigma\gamma_{i\mu}^2 = 1$].

On arrive donc à une conclusion absurde en supposant que l'équation en s, $F(s) = 0$, a une racine imaginaire, ce qui établit le théorème énoncé.

Théorème II. — *Si* $F(s) = 0$ *n'a pas de racines égales, les n valeurs de s fourniront pour $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, n systèmes de valeurs bien déterminées.*

En effet, les valeurs des rapports $\gamma_1 : \gamma_2 : \ldots : \gamma_n$ ne pourraient être mal déterminées et les valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ mal déterminées à l'aide de (8), que si tous les mineurs du déterminant $F(s)$ étaient nuls. Or [1], $F'(s)$ est la somme des mineurs de $F(s)$ au signe près, relatifs aux éléments $(a_{11} - s)$, $(a_{22} - s)$, ...; donc, si $\gamma_1 : \gamma_2 : \ldots : \gamma_n$ étaient mal déterminés, $F(s)$ et $F'(s)$ seraient nuls à la fois, et $F(s)$ aurait des racines multiples.

Il résulte de là que, si l'équation $F(s) = 0$ n'a pas de racines égales, la substitution orthogonale (1), dans laquelle les coefficients auront été calculés au moyen des formules (7) ou (10), ramènera le polynôme $f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ à une somme de n carrés; les coefficients $A_1, A_2, \ldots$ de $y_1^2, y_2^2, \ldots$ se calculeront comme il suit : si l'on multiplie la première formule (10) par $\gamma_{1\mu}$, la seconde par $\gamma_{2\mu}$, etc., et si l'on ajoute, on a

$$\Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} - s_\mu(\gamma_{1\mu}^2 + \gamma_{2\mu}^2 + \ldots + \gamma_{n\mu}^2) = 0,$$

(1) En effet, pour prendre la dérivée de $F(s)$, on peut considérer cette fonction comme composée de $a_{11} - s$, $a_{22} - s$, ..., $a_{nn} - s$ et l'on a

$$F'(s) = -F'_{a_{11}-s} - F'_{a_{22}-s} - \ldots - F'_{a_{nn}-s};$$

les diverses parties de cette somme sont des mineurs de F.

Le polynôme $\sum a_{ij} x_i x_j$ sera supp[illegible]

Cela posé :

THÉORÈME I. — *L'équation* [illegible] *réelles.*

Voici la première et la [illegible] ait été donnée de ce thé[illegible] *Mécanique analytique* de [illegible] la première fois l'équ[illegible] ment de rotation de[illegible]

Si l'équation F[illegible] elle en aurait au mo[illegible] leurs de $y_1, y_2, \ldots$ [illegible] étant désignées p[illegible] on aurait, en

[illegible]

[illegible] de a_{ii} dans ce [illegible] multip[illegible] la formule précédente et ai[illegible]

$$[illegible] = \Delta',$$

[illegible] relations

$$[illegible] \begin{cases} 0 \text{ si } i \gtrless [illegible] \\ \Delta \text{ si } i = [illegible] \end{cases}$$

[illegible]

donc

$$\Delta' = \Delta^{n-1}.$$

Pour représenter le coefficient de a_{ij} dans Δ, on peut considérer tous les éléments de Δ comme des variables indépendantes, et alors Δ sera une fonction du premier degré, par rapport à chaque élément pris individuellement. Le coefficient de a_{ij} sera alors la dérivée de Δ, prise par rapport à a_{ij} ; ainsi

$$\alpha_{ij} = \Delta'_{a_{ij}},$$

que nous écrirons aussi

$$\alpha_{ij} = \Delta'(a_{ij})$$

pour éviter les superpositions d'indices ; de même le coefficient de a_{ij}, a_{kl} pourra être représenté par la dérivée de Δ prise par rapport à a_{ij} et a_{kl}. Ce coefficient sera donc

$$\Delta''(a_{ij}, a_{kl}),$$

et ainsi de suite.

Ceci posé, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{n-1},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta''(a_{11}, a_{22}).$$

Multiplions ces formules membre à membre, en vertu

des formules (a), nous aurons

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ 0 & 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \Delta^{n-1}\Delta''(a_{11}, a_{22}),$$

c'est-à-dire

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\,\Delta^{n-1} = \Delta''(a_{11}, a_{12})\,\Delta^{n-1},$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de (b) et (c),

$$\Delta'(a_{11})\,\Delta'(a_{22}) - \Delta'(a_{21})\,\Delta'(a_{12}) = \Delta\Delta''(a_{11}, a_{12})\,;$$

en permutant les lignes et les colonnes de Δ de manière que la $i^{\text{ième}}$ et la $k^{\text{ième}}$ ligne deviennent la première et la seconde, et de manière que la $j^{\text{ième}}$ colonne et la $l^{\text{ième}}$ deviennent la première et la seconde, on a

$$(11)\qquad \Delta'(a_{ij})\,\Delta'(a_{kl}) - \Delta'(a_{il})\,\Delta'(a_{kj}) = \Delta\Delta''(a_{ij}, a_{kl}).$$

En multipliant entre eux les déterminants

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & . & . & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & . & . & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \Delta^2\Delta'''(a_{11}, a_{22}, a_{33}),$$

ou plus généralement

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{kj} & \alpha_{pj} \\ \alpha_{il} & \alpha_{kl} & \alpha_{pl} \\ \alpha_{iq} & \alpha_{kq} & \alpha_{pq} \end{vmatrix} = \Delta^2 \Delta'''(a_{ij}, a_{kl}, a_{pq}).$$

On voit facilement comment on généraliserait.

CAS OU L'ÉQUATION EN s A DES RACINES ÉGALES.

THÉORÈME. — *Si l'équation en s a une racine double s_μ, tous les mineurs de* $F(s)$ *ont la racine s_μ. En général, si l'équation en s a une racine s_μ d'ordre de multiplicité* M, *tous les mineurs de* $F(s)$ *jusqu'à l'ordre* $M-1$ *sont nuls pour $s = s_\mu$.*

En effet, si $F(s) = 0$ a une racine double s_μ, on aura à la fois $F(s) = 0$ et $F'(s) = 0$. Or, en vertu du théorème des fonctions composées, si l'on regarde $F(s)$ comme une fonction composée de $a_{11} - s$, $a_{22} - s, \ldots, a_{nn} - s$, l'équation $F'(s) = 0$ s'écrira

$$-F'(a_{11} - s) - F'(a_{22} - s) - \ldots - F'(a_{nn} - s) = 0;$$

en multipliant par $F'(a_{11} - s)$, on a

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} &[F'(a_{11} - s)]^2 + F'(a_{11} - s)\,F'(a_{22} - s) + \ldots \\ &\qquad + F'(a_{11} - s)\,F'(a_{nn} - s) = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, en vertu de (11), on a

$$F.F''(a_{11} - s, a_{ii} - s) = F'(a_{n} - s)\,F'(a_{ii} - s) - [F'(a_{ii})]^2,$$

et, si l'on suppose $F = 0$,

$$F'(a_{11} - s)\,F'(a_{ii} - s) = [F'(a_{1i})]^2;$$

l'équation (13) peut alors s'écrire

$$(14)\qquad [F'(a_{11} - s)]^2 + [F'(a_{12})]^2 + \ldots + [F'(a_{1n})]^2 = 0,$$

d'où l'on conclut $F'(a_{11}-s)=0$, $F'(a_{12})=0,\ldots$, et l'on verrait d'une façon analogue que tous les mineurs de premier ordre de F sont nuls.

D'ailleurs, si $F(s)$ admet le facteur $s-s_\mu$ trois fois, le premier membre de (13) l'admettra au moins trois fois aussi, ainsi que le premier membre de (14); on pourra donc le supprimer deux fois, et l'on voit que

$$\frac{F'(a_{11}-s)}{s-s_\mu}, \quad \frac{F'(a_{12})}{s-s_\mu}, \quad \ldots$$

s'annuleront encore pour $s=s_\mu$. On verrait de même que, si $F(s)$ admet M fois le facteur $s-s_\mu$, ses mineurs l'admettront M — 1 fois.

Ceci posé, en représentant, pour abréger, $F'(a_{ij})$ par α_{ij}, on a, en vertu de (11),

$$\alpha_{ij}\alpha_{kl}-\alpha_{il}\alpha_{kj}=F.F''(a_{ij},a_{kl}); \tag{15}$$

or, si F admet trois fois le facteur $s-s_\mu$, les α_{ij} l'admettront chacun deux fois : le premier membre de cette formule l'admettra donc au moins quatre fois et, par suite, $F''(a_{ij},a_{kl})$ l'admettra au moins une fois.

Donc, si $F(s)$ a une racine triple s_μ, ses mineurs d'ordre un et deux s'annuleront pour $s=s_\mu$.

Si F admet s_μ pour racine quadruple, ses mineurs seront divisibles par $(s-s_\mu)^3$ et, en vertu de (15), ses mineurs du second ordre seront divisibles par $(s-s_\mu)^2$. Mais la formule (12) appliquée à F donne

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{kj} & \alpha_{pj} \\ \alpha_{il} & \alpha_{kl} & \alpha_{pl} \\ \alpha_{iq} & \alpha_{kq} & \alpha_{pq} \end{vmatrix} = F^2F'''(a_{ij},a_{kl},a_{pq});$$

le premier membre admet alors le facteur $(s-s_\mu)^9$. F^2 admet le facteur $(s-s_\mu)^8$: donc F''' admet le facteur $s-s_\mu$, et ainsi de suite.

Nous pouvons maintenant prouver d'une manière générale que le polynôme f est réductible en tout cas à une somme de n carrés par le moyen d'une substitution orthogonale.

En effet, supposons que l'équation $F(s) = 0$ admette s_μ pour racine d'ordre de multiplicité M : les équations (10) se réduiront à $n - M$ équations distinctes, puisque tous les mineurs de F, jusqu'à l'ordre $M - 1$ inclusivement, sont nuls, et que ceux de l'ordre M ne le sont pas tous. On peut donc assujettir les $\gamma_{i\mu}$ à $M - 1$ nouvelles relations; il y aura alors une infinité de manières de réduire f à une somme de carrés, et à la racine s_μ correspondront M coefficients A_μ égaux entre eux. En résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

On peut toujours ramener le polynôme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

à la forme

$$s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n,$$

au moyen d'une substitution orthogonale; $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *sont alors les racines de l'équation en* s; $F(s) = 0$.

UTILITÉ DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

D'après ce que l'on vient de voir, pour découvrir, pour ainsi dire sans calcul, en combien de carrés positifs, négatifs ou nuls on peut décomposer le polynôme $f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$, on formera l'équation en s; le nombre de ses racines positives, négatives ou nulles sera le nombre des carrés positifs, négatifs ou nuls dans lesquels f pourra se décomposer; d'ailleurs, comme l'équation en s a toutes ses racines réelles, le théorème de Descartes nous montre que les racines positives sont en nombre égal à celui de ses variations : donc *le poly-*

nôme f est décomposable en autant de carrés positifs que F(s) *présente de variations.*

Mais voici d'autres applications :

Pour que le polynôme f soit un produit de deux facteurs linéaires, il faut que l'équation en s ait $n-2$ racines nulles; en effet, alors le polynôme f se ramenant à la forme $A_1y_1^2 + A_2y_2^2$ pourra aussi s'écrire

$$(\sqrt{A_1}y_1 + \sqrt{-A_2}y_2)(\sqrt{A_1}y_1 - \sqrt{-A_2}y_2).$$

Pour que le polynôme f soit un carré parfait, il faut que tous les coefficients de l'équation en s soient nuls, à l'exception des deux premiers.

QUELQUES MOTS SUR LA RÉDUCTION SIMULTANÉE DE DEUX POLYNÔMES A UNE SOMME DE CARRÉS.

Une substitution orthogonale n'altérant pas une somme de n carrés, en d'autres termes, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ devenant $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ par une substitution orthogonale, il en résulte que l'on peut toujours, au moyen de deux substitutions orthogonales successives, ramener simultanément deux fonctions du second degré à des sommes de carrés. En effet, considérons les deux fonctions à n variables

$$f = \Sigma a_{ij}x_ix_j, \quad g = \Sigma b_{ij}x_ix_j,$$

effectuons la substitution orthogonale qui ramène f à la forme $s_1y_1^2 + \ldots + s_ny_n^2$, en posant $y_1 = \frac{z_1}{\sqrt{s_1}}$, $y_2 = \frac{z_2}{\sqrt{s_2}}, \ldots$; la fonction f sera ramenée à la forme $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$, et la fonction g pourra être représentée par $\Sigma c_{ij}z_iz_j$. Si maintenant on effectue une nouvelle substitution orthogonale, celle qui ramène $\Sigma c_{ij}z_iz_j$ à une somme de

carrés $A_1 t_1^2 + \ldots + A_n t_n^2$, f prendra la forme

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2,$$

puisque la définition même de la substitution orthogonale est de conserver leur forme aux fonctions

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

La méthode que nous venons d'indiquer tombera en défaut quand f et g seront à la fois des sommes de moins de n carrés, parce qu'alors la substitution $y = \frac{z_1}{\sqrt{s_1}}, \ldots$ sera illusoire, l'une des quantités s_1 s'annulant. Mais alors f et g ne sont plus, à proprement parler, des fonctions de n variables, et c'est sur les variables effectives, c'est-à-dire réduites à leur minimum, que l'on effectuera les substitutions orthogonales dont il a été question.

Comme on le voit, la substitution unique qui revient aux deux substitutions orthogonales que l'on est obligé de faire ne sera pas toujours réelle, puisque l'on doit remplacer y_1 par $\frac{z_1}{\sqrt{s_1}}, \ldots$ et que $s_1, s_2, \ldots$ peuvent être négatifs; mais on voit qu'elle sera réelle *si l'une des formes f ou g est une somme de carrés tous positifs ou tous négatifs.*

La possibilité de réduire deux formes à des sommes de carrés étant établie, voici comment il conviendra de procéder dans la pratique.

On effectuera sur f et sur g la substitution (1) sans la supposer orthogonale, c'est-à-dire sans supposer les relations (2) et, pour ramener f et g à des sommes de carrés, on posera, comme on a fait plus haut pour f seul,

$$(16) \qquad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0, \quad \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0,$$

$$(17) \qquad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = A_\mu, \quad \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = B_\mu;$$

en appelant alors $f_1, f_2, \dots$ les demi-dérivées de

$$f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \dots),$$

prises par rapport à $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \dots$, et $g_1, g_2, \dots$ celles de $g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \dots)$ par rapport aux mêmes variables $\gamma_{1\mu}$, $\gamma_{2\mu}, \dots$, les formules (16) et (17) s'écriront

$$(18) \quad \begin{cases} f_1 \gamma_{1\nu} + f_2 \gamma_{2\nu} + \dots + f_n \gamma_{n\nu} = 0, \\ g_1 \gamma_{1\nu} + \dots + g_n \gamma_{n\nu} = 0, \\ f_1 \gamma_{1\mu} + f_2 \gamma_{2\mu} + \dots + f_n \gamma_{n\mu} = A_\mu, \\ g_1 \gamma_{1\mu} + \dots + g_n \gamma_{n\mu} = B_\mu, \end{cases}$$

ou

$$(19) \quad f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \dots) = A_\mu, \quad g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \dots) = B_\mu.$$

Des équations (18) on tire

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \dots = \frac{f_n}{g_n},$$

et, si l'on désigne par λ cette suite de rapports égaux, on aura, pour déterminer $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \dots, \gamma_{n\mu}$, les équations

$$f_1 - g_1\lambda = 0, \quad f_2 - g_2\lambda = 0, \quad \dots, \quad f_n - g_n\lambda = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(20) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda b_{11})\gamma_{1\mu} \\ \quad + (a_{12} - \lambda b_{12})\gamma_{2\mu} + \dots + (a_{1n} - \lambda b_{1n})\gamma_{n\mu} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{n1} - \lambda b_{n1})\gamma_{1\mu} \\ \quad + (a_{n2} - \lambda b_{n2})\gamma_{2\mu} + \dots + (a_{nn} - \lambda b_{nn})\gamma_{n\mu} = 0. \end{cases}$$

Pour les résoudre, on formera l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \dots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation a n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu, \ldots \lambda_n$. Ces racines portées dans les équations (20) feront connaître les rapports des quantités $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots$ à l'une d'elles; on achèvera de les déterminer, si l'on veut, en se donnant A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

Chaque racine de l'équation en λ faisant connaître un groupe des quantités $\gamma_{1\mu}, \gamma_{1\mu}, \ldots$, le problème sera résolu.

Si l'on multiplie les équations (20) par $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots$ respectivement et si on les ajoute, on trouve, en remplaçant λ par λ_μ,

$$f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots) - \lambda_\mu g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots) = 0,$$

ou

$$A_\mu = s_\mu B_\mu.$$

Ainsi, en résumé, *pour ramener simultanément deux formes à des sommes de carrés, on peut se donner arbitrairement la forme réduite de l'une*

$$B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \ldots + B_n y_n^2,$$

et l'autre sera alors

$$B_1 \lambda_1 y_1^2 + B_2 \lambda_2 y_2^2 + \ldots + B_n \lambda_n y_n^2,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *étant les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant dont les éléments sont les coefficients des dérivées de* $f - \lambda g$.

SUR LA CONSTRUCTION DE LA TANGENTE A LA COURBE $\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$, $f(\omega)$ ET $\varphi(\omega)$ DÉSIGNANT DES FONCTIONS RATIONNELLES DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE L'ANGLE ω, DE SES MULTIPLES OU DE SES PARTIES ALIQUOTES ;

PAR M. G. FOURET,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. La seule hypothèse que nous ferons tout d'abord sur la nature des fonctions $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, qui figurent dans l'équation

$$\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}, \tag{1}$$

sera de supposer que l'angle ω n'y entre que par ses lignes trigonométriques et par celles de ses multiples, sous-multiples ou parties aliquotes quelconques. Nous allons, dans cette hypothèse, former une expression de $\tang V$ qui ne contienne que ρ et des fonctions trigonométriques de ω, V désignant l'angle de la tangente en un point quelconque de la courbe avec le rayon vecteur.

Dans ce but, écrivons l'équation (1) de la manière suivante :

$$\rho[\omega + \varphi(\omega)] - f(\omega) = 0,$$

puis prenons les dérivées; nous obtenons

$$\rho'[\omega + \varphi(\omega)] + \rho[1 + \varphi'(\omega)] - f'(\omega) = 0.$$

En éliminant $\omega + \varphi(\omega)$ entre ces deux équations, on

en déduit

$$(2)\qquad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{f(\omega)}{f'(\omega) - \rho[1 + \varphi'(\omega)]}.$$

En posant

$$(3)\qquad \frac{f'(\omega)}{1 + \varphi'(\omega)} = h, \qquad \frac{f(\omega)}{1 + \varphi'(\omega)} = k,$$

et observant que l'on a

$$\frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tang} V,$$

on tire de l'équation (2) la relation

$$(4)\qquad \operatorname{tang} V = \frac{k}{h - \rho}.$$

2. *Remarque.* — Les relations (2), (3) et (4) ne changent pas, lorsque l'on considère, au lieu de l'équation (1), l'équation plus générale

$$\rho = \frac{f(\omega)}{\omega - \alpha + \varphi(\omega)},$$

dans laquelle α désigne une constante arbitraire. L'équation (2) n'est d'ailleurs autre chose que l'équation différentielle commune à toutes les courbes obtenues en faisant varier α. Comme, en vertu de l'hypothèse faite sur $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, cette équation différentielle écrite en coordonnées cartésiennes serait algébrique, les courbes qu'elle définit forment un *système*, c'est-à-dire qu'il y en a un nombre déterminé, dans le plan, qui passent par un point quelconque, et un nombre déterminé qui sont tangentes à une droite quelconque [*Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. II, p. 72-83)].

3. L'expression (4) de tang V fournit la construction suivante de la tangente en un point quelconque M de la courbe (1).

Sur le rayon vecteur OM, et à partir du pôle O, portons une longueur OP $= h$ dans le sens déterminé par le signe de h. Au point P élevons une perpendiculaire au rayon vecteur, et prenons sur cette perpendiculaire une longueur PI $= k$, dans le sens des ω croissants si k est positif, et dans le sens contraire s'il est négatif. Le point I est un point de la tangente cherchée, qu'on obtient par suite en joignant le point M au point I.

Dans les cas où les expressions de h et de k se prêteront à une construction suffisamment simple du point I, on aura une construction de la tangente. Nous en donnerons plus loin des exemples.

4. Supposons maintenant que $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ soient des fonctions *rationnelles* des lignes trigonométriques de l'angle ω, de ses multiples ou parties aliquotes quelconques. On sait que toutes ces lignes trigonométriques peuvent s'exprimer en fonction rationnelle du sinus et du cosinus d'un même sous-multiple de ω : soit $\frac{\omega}{n}$ le plus grand des sous-multiples de ω jouissant de cette propriété. Comme $\sin\frac{\omega}{n}$ et $\cos\frac{\omega}{n}$ ne prennent que n valeurs distinctes lorsqu'on remplace ω par $\omega + 2i\pi$, i désignant un nombre entier quelconque, il en sera de même de $f(\omega)$, de $\varphi(\omega)$, et par suite aussi de $f'(\omega)$ et de $\varphi'(\omega)$.

Il résulte de là, en vertu des expressions (3) de h et de k, que, pour chaque rayon vecteur, on construira, à l'aide des relations (3), n points I; et la tangente à la courbe, en l'un quelconque de ses points situés sur le rayon vecteur considéré, ira passer par l'un de ces points I.

5. Le rayon vecteur auquel correspondent les n points I dont il vient d'être question est envisagé avec le sens qui lui est assigné par la valeur de ω. Comme il y a de même n points I pour le rayon vecteur de sens directement contraire au précédent, on a généralement en tout $2n$ points I pour chaque droite issue du point O. Ce nombre se réduira toutefois à n lorsque, pour deux valeurs de ω différant d'un multiple impair de π convenablement choisi, $f(\omega)$ prendra des valeurs égales et de signes contraires, $\varphi(\omega)$ des valeurs égales et de même signe. Dans ce cas, en effet, h et k changeront de signe lorsqu'on échangera entre elles ces deux valeurs de ω, et, par suite, la construction indiquée plus haut (3) donnera, pour ces deux valeurs, le même point I.

6. Il est facile de former l'équation du lieu des points I. Désignons par ρ_1 et ω_1 les coordonnées polaires d'un quelconque de ces points correspondant à une droite inclinée d'un angle ω sur l'axe polaire. On a évidemment, eu égard aux relations (3),

$$(5)\quad \begin{cases} \omega_1 = \omega + \text{arc tang}\,\dfrac{k}{h} = \omega + \text{arc tang}\,\dfrac{f(\omega)}{f'(\omega)}, \\ \rho_1 = \sqrt{h^2 + k^2} = \dfrac{\sqrt{f^2(\omega) + f'^2(\omega)}}{1 + \varphi'(\omega)}. \end{cases}$$

Si l'on rapporte ce même lieu à un système d'axes rectangulaires composé de l'axe polaire Ox et de la perpendiculaire Oy à cette droite menée par le pôle, on a, pour les coordonnées x et y d'un point I quelconque,

$$x = h\cos\omega - k\sin\omega,$$
$$y = h\sin\omega + k\cos\omega,$$

ou bien, en remplaçant h et k par leurs valeurs (3) en

fonction de ω,

$$(6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{f'(\omega)\cos\omega - f(\omega)\sin\omega}{1 + \varphi'(\omega)}, \\[2ex] y = \dfrac{f'(\omega)\sin\omega + f(\omega)\cos\omega}{1 + \varphi'(\omega)}. \end{cases}$$

Ces formules nous serviront plus loin.

APPLICATIONS.

7. *Spirale hyperbolique.* — Parmi les équations qui rentrent dans le type de l'équation (1), la plus simple est

$$\rho = \frac{a}{\omega - \alpha},$$

qui définit, comme on sait, la courbe appelée *spirale hyperbolique*.

Les formules (3) donnent, dans ce cas,

$$h = 0, \quad k = a.$$

On voit par là que les tangentes, aux divers points de la spirale correspondant aux angles polaires compris dans la formule $2i\pi + \omega$, concourent en un point I, qui s'obtient en élevant en O à la direction commune du rayon vecteur une perpendiculaire, et portant un segment égal à a sur la portion de cette perpendiculaire inclinée de $\frac{\pi}{2}$ sur la partie positive du rayon vecteur. On retrouve ainsi la propriété caractéristique de cette courbe, consistant en ce que sa *sous-tangente* est constante.

Quant aux points de la spirale correspondant aux angles $(2i + 1)\pi + \omega$, dont les rayons vecteurs sont situés sur la même droite que les rayons vecteurs correspondant à $2i\pi + \omega$, les tangentes en ces points con-

courent également en un même point ; mais ce point est distinct du point I : il lui est diamétralement opposé par rapport au pôle.

8. *Courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, éclairée par des rayons lumineux convergents.*

Cherchons tout d'abord l'équation polaire de la projection de cette courbe d'ombre sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de vis et passant par le point lumineux A. Nous considérerons ce plan comme plan horizontal de projection. Prenons pour pôle le pied O de l'axe de la surface de vis et pour axe polaire la droite OA. Posons $OA = a$, et désignons par α l'angle que fait avec OA la génératrice de la surface de vis située dans le plan horizontal. En appelant H le pas de la surface de vis, et p le paramètre de distribution commun à toutes les génératrices, on a, comme on sait, $p = \frac{H}{2\pi}$.

Cela posé, considérons une génératrice quelconque G dont la projection horizontale Og fait avec Ox l'angle ω, et évaluons le rayon vecteur $Om = \rho$, m étant la projection horizontale du point M de la courbe d'ombre situé sur G. Le point M n'est autre chose que le point de la génératrice G, en lequel le plan passant par cette droite et le point lumineux A est tangent à la surface. En désignant par φ l'angle de ce plan avec le plan projetant horizontalement la génératrice G, lequel n'est autre que le plan central de cette génératrice, et en remarquant que le point central est situé sur l'axe, on a la relation bien connue

$$(1) \qquad \rho = p \tang \varphi.$$

Évaluons $\tang \varphi$: pour cela, soient l la distance du point A à Og et d la hauteur de G au-dessus du plan horizon-

tal de projection. On a évidemment

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{l}{d}.$$

Mais on a aussi, d'autre part,

$$l = a\sin\omega, \quad d = \frac{H}{2\pi}(\omega - \alpha).$$

En tenant compte de ces relations, et substituant à p et à tang φ leur valeur dans la relation (7), on obtient

$$(8) \qquad \rho = \frac{a\sin\omega}{\omega - \alpha},$$

équation polaire de la projection horizontale de la courbe d'ombre.

9. Cette équation, qui rentre dans le type de l'équation (1), va nous permettre de construire géométriquement la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis. Les formules (3), appliquées à l'équation (8), donnent

$$h = a\cos\omega, \quad k = a\sin\omega.$$

Par suite, on obtient OP $= h$ (3), en abaissant du point A une perpendiculaire sur le rayon vecteur Om, et on a le point I en prolongeant AP d'une longueur égale PI. On a bien, en effet, PI $=$ AP $= a\sin\omega = k$. Il résulte de là que, pour avoir la tangente en un point quelconque m de la projection horizontale de la courbe d'ombre, il suffit de joindre ce point au point I, symétrique de A par rapport à Om.

On retrouve ainsi très simplement, comme on le voit, une construction déjà connue, que M. de la Gournerie obtient, dans son *Traité de Géométrie descriptive*

(IIIe Partie, p. 148), en se servant du paraboloïde osculateur de la surface de vis ([1]).

10. La longueur OI est évidemment constante et égale à OA : d'où il résulte que le lieu du point I est le cercle décrit du point O comme centre avec OA pour rayon. C'est ce qu'indique aussi tout naturellement la seconde des formules (5), appliquée à l'équation (8).

La construction du point I montre que ce point est le même pour tous les points de la courbe situés sur une même droite Om. On arrive à la même conclusion en remarquant, d'après ce que nous avons vu ci-dessus (4), que $f(\omega) = a \sin\omega$ ne varie pas quand on change ω en $2\pi + \omega$, et change de signe en conservant la même valeur absolue, quand on remplace ω par $\pi + \omega$, $\varphi(\omega) = -\alpha$ étant une constante.

Remarque. — Dans le cas où α est nul, c'est-à-dire où le point lumineux est sur la surface de vis, l'équation (8) se réduit à

$$\rho = \frac{a \sin\omega}{\omega}.$$

Elle est vérifiée, quel que soit ρ, pour $\omega = 0$, ce qui signifie que l'axe polaire fait partie de la courbe. En d'autres termes, dans l'espace, la génératrice qui contient le point lumineux fait partie de la ligne d'ombre propre : c'est d'ailleurs évident géométriquement.

11. *Courbe dont la discussion a fait le sujet de la composition de Mathématiques pour l'admissibilité à l'École Polytechnique en* 1879. — Cette courbe a pour

---

([1]) Nous sommes également arrivé, par une autre voie, aux résultats précédents, dans un Mémoire *Sur les faisceaux ponctuels* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 203).

équation en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\omega - 3\cos\omega},$$

ou, ce qui revient au même,

(9) $$\rho = \frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{\omega - \frac{3}{2}\cos\omega}.$$

Cette équation n'est qu'un cas particulier de la suivante,

(10) $$\rho = \frac{a\sin\omega}{\omega - \alpha - m\cos\omega},$$

dans laquelle a, α et m désignent des constantes arbitraires. Nous allons construire la tangente de la courbe qu'elle définit.

L'équation (10) rentre dans le type de l'équation (1); il n'y a qu'à faire dans cette dernière

$$f(\omega) = a\sin\omega, \quad \varphi(\omega) = -\alpha - m\cos\omega,$$

et par suite

$$f'(\omega) = a\cos\omega, \quad \varphi'(\omega) = m\sin\omega.$$

On en conclut

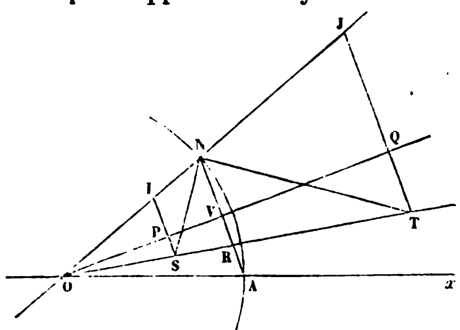
(11) $$h = \frac{a\cos\omega}{1 + m\sin\omega}, \quad k = \frac{a\sin\omega}{1 + m\sin\omega},$$

d'où

$$\frac{k}{h} = \operatorname{tang}\omega.$$

Or, $\frac{k}{h}$ n'est autre chose que la tangente de l'angle formé par OI avec le rayon vecteur OM. Il résulte de là que le

point I cherché est situé sur la droite symétrique de l'axe polaire par rapport au rayon vecteur.



12. D'autre part, on a

$$(12)\qquad OI = \frac{PI}{\sin POI} = \frac{k}{\sin\omega} = \frac{a}{1 + m\sin\omega}.$$

Décrivons du point O comme centre, avec un rayon égal à a, une circonférence qui coupe en A la partie positive de l'axe polaire et en N le prolongement de OI.

Des égalités (12) on tire

$$(13)\qquad OI + m\,OI\sin\omega = ON,$$

ou bien, à cause de $OI\sin\omega = IP$,

$$(14)\qquad m\,IP = ON - OI = IN.$$

Sur le prolongement de IP, prenons un point S tel que $\frac{IS}{IP} = m$; traçons la droite AN, qui est évidemment perpendiculaire sur le rayon vecteur OM en un certain point V, et prolongeons OS jusqu'à sa rencontre en R avec AN. Les droites ON, OV, OR interceptent sur les deux parallèles IS et NR des segments proportionnels, de sorte que l'on a

$$\frac{NR}{NV} = \frac{IS}{IP} = m.$$

A l'aide de cette relation, on construira immédiatement le point R, et l'on aura, par suite, la droite OS.

Des égalités (13) et (14) on conclut, d'autre part,

$$\text{IS} = \text{IN},$$

par suite

$$\widehat{\text{INS}} = \widehat{\text{ISN}} = \widehat{\text{SNR}}.$$

Il suit de là que NS est la bissectrice intérieure de l'angle ONA. On aura donc le point S en prenant l'intersection de cette bissectrice avec la droite OR, et le point I en abaissant du point S une perpendiculaire sur le rayon vecteur et prolongeant cette perpendiculaire jusqu'à sa rencontre en I avec la droite ON.

13. Considérons les points situés sur un même rayon vecteur qui correspondent aux divers angles compris dans la formule $2i\pi + \omega$, i désignant un entier quelconque. Les valeurs de h et de k données par les relations (11) sont les mêmes pour tous ces points. On en conclut que les tangentes à la courbe aux divers points d'un même rayon vecteur qui correspondent aux angles compris dans la formule $2i\pi + \omega$ concourent en un même point I, construit comme nous l'avons vu plus haut (11 et 12).

Si l'on considère maintenant les points du même rayon vecteur qui correspondent aux angles compris dans la formule $(2i + 1)\pi + \omega$, i désignant toujours un entier quelconque, les tangentes en ces nouveaux points sont aussi concourantes, mais ce point de concours J est distinct du point I déterminé plus haut : pour qu'il en fût autrement, il faudrait en effet qu'en remplaçant ω par $(2i + 1)\pi + \omega$ dans les formules (11), les valeurs de h et de k ne fissent que changer de signe, ce qui n'a pas lieu.

14. Nous allons obtenir le point J par une construction analogue à celle qui nous a donné le point I. On voit d'abord immédiatement que le point J est situé sur la droite OI. En effet, en appliquant ce que nous avons déjà dit plus haut pour le point I, on sait que la droite OJ fait avec Ox un angle double de l'angle formé par le rayon vecteur correspondant avec le même axe, c'est-à-dire un angle égal à $2\pi + 2\omega$; il en résulte que la droite OJ coïncide avec OI, puisque OI est inclinée sur l'axe polaire de l'angle 2ω.

La position du point J sur la droite OI est déterminée par la relation (13), dans laquelle il n'y a qu'à remplacer ω par $\pi + \omega$, ce qui donne

$$(15) \qquad \mathrm{OJ} - m\,\mathrm{OJ}\sin\omega = \mathrm{ON}.$$

Cette relation nous montre que le point J est situé au delà de N par rapport à O. Du point J, supposé connu, abaissons JQ perpendiculaire sur le rayon vecteur OM, et prolongeons cette dernière droite jusqu'à son point de rencontre T avec OS prolongée. On a

$$\mathrm{OJ}\sin\omega = \mathrm{JQ},$$

et l'on peut écrire, par suite, la relation (15)

$$m\,\mathrm{JQ} = \mathrm{JN}.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\frac{\mathrm{JT}}{\mathrm{JQ}} = \frac{\mathrm{IS}}{\mathrm{IP}} = m,$$

d'où

$$\mathrm{JT} = m\,\mathrm{JQ},$$

et par suite

$$\mathrm{JT} = \mathrm{JN}.$$

Le triangle JNT étant isoscèle, on en conclut

$$\widehat{\mathrm{JNT}} = \widehat{\mathrm{JTN}} = \widehat{\mathrm{TNR}},$$

ce qui indique que NT est la bissectrice de l'angle $\widehat{ANJ}$. De là résulte la détermination du point T, et par suite celle du point J.

15. En résumé, voici la construction des deux points I et J auxquels aboutissent respectivement les tangentes aux divers points de la courbe (10) situés sur un même rayon vecteur et correspondant aux angles polaires $2i\pi + \omega$ et $(2i+1)\pi + \omega$:

Du pôle comme centre on décrit un cercle d'un rayon égal à a : A *étant le point d'intersection de ce cercle avec la partie positive de l'axe polaire, on prend le point* N *symétrique de* A *par rapport au rayon vecteur* OM *que l'on considère.* V *étant le point d'intersection de* OM *et de* AN, *on porte sur* NA, *à partir du point* N, *un segment* NR *tel que* $\frac{NR}{NV} = m$. *On trace les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* ONA, *qui rencontrent* OR *respectivement aux points* S *et* T. *Des points* S *et* T *on abaisse* SP *et* TQ *perpendiculaires sur* OM : *ces perpendiculaires prolongées vont couper* ON *aux points* I *et* J *cherchés.*

16. Les points I et J sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points O et N. Cela résulte de ce que, en vertu d'une propriété bien connue des bissectrices d'un angle d'un triangle, S et T sont conjugués harmoniques par rapport à O et à R, et de ce que les droites ST, RN et TJ sont parallèles.

La partie de la droite ON prolongée au delà du point O contient deux points analogues à I et à J, qui correspondent respectivement aux angles compris dans les formules $2i\pi + \frac{\pi}{2} + \omega$ et $(2i+1)\pi + \frac{\pi}{2} + \omega$. La courbe

lieu des points I et J a donc quatre points sur une droite quelconque passant par le point O. Les égalités (13) et (15) indiquent d'ailleurs que les points I et J ne se confondent jamais avec le point O. Le lieu des points I et J est, par suite, du quatrième ordre.

L'application des formules (5) ou (6) fournit immédiatement l'équation polaire de ce lieu, qui est

$$\rho = \frac{a}{1 + m \sin \frac{1}{2} \omega}.$$

Si l'on considère les deux valeurs ρ_1 et ρ_2, données par cette équation pour deux valeurs de ω différant de 2π, on vérifie aisément la relation

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{a}.$$

On retrouve ainsi la proportion harmonique qui lie les quatre points O, N, I et J.

17. En appliquant les résultats que nous venons d'exposer (11 à 16) au cas particulier de $a = \frac{1}{2} \cdot m = \frac{3}{2}$, on obtient la construction de la tangente à la courbe qui a été donnée, comme sujet de composition, pour l'admissibilité à l'École Polytechnique en 1879.

En faisant $m = 0$, on retombe sur le cas de la projection de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, que nous avons traité directement (8 à 10), et, en appliquant à ce cas particulier la construction de la tangente à la courbe (10), on vérifie facilement que les points I et J se confondent dans ce cas tous les deux avec le point N.

18. On peut généraliser la construction décrite plus haut (15) de façon à la rendre applicable aux courbes définies par une équation de la forme

$$\rho = \frac{a \sin \omega}{\omega - \alpha - m \cos n\omega},$$

n désignant un nombre quelconque.

Nous n'insisterons pas sur cette construction.

On peut aussi construire, par un procédé analogue, la tangente à la courbe

$$\rho = \frac{a}{\omega - \alpha - m \cos \omega},$$

ou, plus généralement,

$$\rho = \frac{a}{\omega - \alpha - m \cos n\omega},$$

n désignant toujours un nombre quelconque. Les exemples que nous avons traités suffisent pour mettre le lecteur sur la voie de la méthode à suivre.

SUR LA MACHINE PNEUMATIQUE;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

Il s'agit de calculer la loi de décroissement de la force élastique de l'air contenu dans le récipient d'une machine pneumatique, en tenant compte de l'espace nuisible.

Soient

V le volume du récipient et des conduits;
v celui du corps de pompe quand le piston est au haut de sa course;
u le volume de l'espace nuisible;

H la pression atmosphérique ;
H_0 la pression initiale dans le récipient ;
H_k, en général, la pression après le $k^{ième}$ coup de piston.

Quand le piston est au bas de sa course, après le $(k-1)^{ième}$ coup, l'air occupe à la fois le volume V sous la pression H_{k-1} et le volume u sous la pression H ; lorsque le piston est soulevé, le mélange de ces deux masses d'air occupe le volume $V+v$ sous la pression H_k ; la loi du mélange des gaz donne donc la formule

$$(1) \qquad (V+v)H_k = VH_{k-1} + uH.$$

Cette relation n'est pas simple, et c'est ce qui explique le calcul assez lourd et peu accessible aux commençants au moyen duquel on en déduit l'expression générale de H_n.

Mais, si l'on pose

$$(2) \qquad H_k - \frac{u}{v}H = \varepsilon_k,$$

la relation (1) prend la forme expressive

$$(3) \qquad \varepsilon_k = \frac{V}{V+v}\varepsilon_{k-1}.$$

On voit que l'on obtient chaque quantité ε de la précédente en la multipliant par $\frac{V}{V+v}$, et, par suite, qu'en faisant successivement $k=1, 2, \ldots, n$, on a

$$(4) \qquad \varepsilon_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \varepsilon_0.$$

C'est la formule connue

$$H_n - \frac{u}{v}H = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \left(H_0 - \frac{u}{v}H\right).$$

Ajoutons qu'il est logique de substituer les quantités ε

[illegible] la machine [illegible] raisonnement [illegible] l'espace nuisible [illegible] cette force élastique [illegible] un nombre infini [illegible] du piston [illegible] la pression limite [illegible] entre deux [illegible] la relation (1) [illegible] ainsi [illegible] de la relation [illegible] à un calcul [illegible] deux excès consécutifs [illegible] deux pressions [illegible] abstraction de l'espace nuisible.

Les observations analogues s'appliquent au calcul relatif à la marche de la compression.

REMARQUE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE COMBINATOIRE;

Par M. Maurice D'OCAGNE,
Élève en Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.

Lorsqu'on se propose de trouver le nombre N_m des points d'intersection des diagonales d'un polygone convexe de m côtés, intérieurs à ce polygone, on cherche à lier ce nombre à celui qui lui correspond N_{m-1} pour un polygone de $m-1$ côtés.

Si l'on cherche le rapport $\frac{N_m}{N_{m-1}}$, on sait que l'on trouve $\frac{N_m}{N_{m-1}} = \frac{m}{m-4}$, d'où l'on déduit facilement la formule connue $N_m = C_m^4$.

Mais il est plus facile de trouver la différence $N_m - N_{m-1}$ que le quotient $\frac{N_m}{N_{m-1}}$; on obtient alors

$$N_m - N_{m-1} = 1(m-3) + 2(m-4) + 3(m-5) + \ldots + (m-3)1.$$

Je me propose de faire voir comment, à l'aide de ce résultat, on peut très facilement arriver à la formule obtenue par la première méthode.

La différence peut s'écrire

$$\begin{aligned} N_m - N_{m-1} = \;& 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-4) + (m-3) \\ & + 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-4) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 1 + 2 + 3 \\ & + 1 + 2 \\ & + 1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} N_m - N_{m-1} = \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} + \ldots \\ + \frac{4.3}{1.2} + \frac{3.2}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}. \end{aligned}$$

Cette différence est donc égale à la somme des $m-3$ premiers nombres figurés du deuxième ordre du triangle arithmétique de Pascal; elle est, par suite, égale au $(m-3)^{\text{ième}}$ nombre figuré du troisième ordre de ce triangle. Ainsi,

$$N_m - N_{m-1} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$

ou

$$(1)\qquad N_m - N_{m-1} = C^3_{m-1}.$$

Or, pour $m = 4$, nous avons le quadrilatère, dans lequel les diagonales ne donnent qu'un point d'intersection; donc

$$N_4 = 1 = C^4_4.$$

Il me suffit maintenant de faire voir que, si la formule est vraie pour un polygone de $m - 1$ côtés, elle est encore vraie pour un polygone de m côtés, c'est-à-dire qu'en supposant $N_{m-1} = C^4_{m-1}$ j'ai $N_m = C^4_m$, ce qui a lieu en effet, car, d'après la formule (1), j'ai

$$N_m = N_{m-1} + C^3_{m-1} = C^4_{m-1} + C^3_{m-1} = C^4_m.$$

Je retrouve donc bien ainsi la formule qu'avait donnée l'autre méthode.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les éléments de la Géométrie cinématique; par *A. Mannheim*. Grand in-8°, avec 249 figures dans le texte. — Paris, Gauthier-Villars, 1880. Prix : 17 fr.

PRÉFACE.

Après quinze années de professorat, pendant lesquelles je me suis efforcé sans cesse d'améliorer et de compléter mon enseignement, je me décide à publier ce Livre.

Il contient les Leçons que j'ai faites à l'École Polytechnique pendant l'hiver 1878-1879.

En les reproduisant pour ainsi dire sans modification, j'ai l'espoir de leur laisser une forme plus vivante que si j'avais recherché une rédaction concise.

On sait que les élèves admis à l'École Polytechnique sont déjà familiarisés avec les Éléments de la Géométrie descriptive. Il est donc nécessaire de posséder ces Éléments en commençant la lecture de cet Ouvrage, de même que, pour la suite, il faut se reporter aux notions que les élèves acquièrent dans le Cours d'Analyse.

Cet Ouvrage est divisé en deux Parties.

La première contient l'étude des différents modes employés pour la représentation des corps. Ceux-ci sont supposés terminés par les surfaces les plus simples, c'est-à-dire les surfaces planes, cylindriques, coniques, sphériques ou les surfaces du second ordre.

Après une Leçon sur les ombres et une autre sur les projections cotées, commence l'étude des différentes perspectives.

J'ai conservé sans aucun changement le *trait de perspective* que M. de la Gournerie, auquel j'ai eu l'honneur de succéder à l'École, avait adopté pour la perspective conique et qu'il a exposé dans son excellent *Traité de perspective linéaire* (¹).

Pour profiter de cette première Partie du Cours, une simple lecture ne saurait suffire : il est indispensable d'y joindre le tracé de nombreuses épures.

Les surfaces que l'on rencontre le plus fréquemment dans la pratique, telles que les surfaces réglées, les surfaces de révolution et les surfaces hélicoïdales, sont traitées dans la deuxième Partie.

C'est aussi dans cette deuxième Partie que se trouvent les éléments de la *Géométrie cinématique*, exposés didactiquement pour la première fois.

Voici comment j'ai été amené à entrer dans cette voie nouvelle.

En 1867, le Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique, sur la proposition éclairée et libérale du général Favé, qui commandait alors l'École, accorda aux professeurs la faculté de modifier leur enseignement.

Profitant de cette latitude, j'ai commencé, dès cette époque, à faire usage de plusieurs propriétés relatives aux déplacements des figures; j'en ai successivement ajouté d'autres.

Ce sont des propriétés de cette nature que j'ai groupées dans mon Cours sous le nom de *Géométrie cinématique*.

Dans des Mémoires divers et de nombreuses Notes, présentés à l'Académie des Sciences, j'avais préparé, depuis longtemps, les matériaux de cette branche particulière de la Géométrie. La plupart de ces travaux sont coordonnés dans cet Ouvrage; ainsi réunis ils forment, à proprement parler, un corps de doctrine.

Tandis que la *Cinématique* a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces, la *Géométrie cinématique* a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces et *du temps*.

Il s'agit bien là du déplacement des figures et non du mouvement tel qu'il est considéré en Mécanique, car à ce dernier point de

---

(¹) Je saisis cette occasion pour exprimer publiquement toute ma gratitude à M. de la Gournerie, qui, avec la plus grande bienveillance, m'a beaucoup aidé au début de mon enseignement en voulant bien me communiquer ses programmes détaillés et ses notes.

vue « ... il n'y a réellement *mouvement* que quand, l'idée du temps pendant lequel a lieu le déplacement étant jointe à celle du déplacement lui-même, il en résulte la notion de vitesse plus ou moins grande avec laquelle il s'opère... ».

En employant d'une manière systématique des propriétés qui concernent les déplacements des figures, comme procédé très simple de démonstration, je suis arrivé à constituer une nouvelle méthode géométrique au moyen de laquelle j'ai pu résoudre des problèmes jusqu'ici réservés à l'Analyse infinitésimale.

Ces propriétés, d'ailleurs intéressantes en elles-mêmes, et qui sont d'une application immédiate en *Mécanique*, m'ont également permis de faire une *Leçon d'Optique géométrique*. J'ai ainsi cherché à réunir tout ce qui, dans les Cours de Mécanique et de Physique, est relatif à la Géométrie; car ce n'est que par une liaison bien entendue des différents Cours de l'École que l'enseignement général de cette grande Institution peut présenter une certaine unité.

Les Applications de la Géométrie cinématique à la Géométrie descriptive concernent le raccordement des surfaces réglées, la théorie de la courbure des surfaces, l'étude des surfaces de vis à filet triangulaire ou carré et enfin certains problèmes relatifs aux surfaces réglées générales.

Toutes ces Applications, ainsi que celles dont il est question plus loin, sont le fruit de mes recherches personnelles; elles sont présentées dans cet Ouvrage sous une forme appropriée à l'enseignement.

J'ai ajouté à plusieurs Leçons des Suppléments qui renferment quelques développements relatifs à la théorie des surfaces et montrent l'utilité des surfaces que j'ai appelées *normalies*.

Dans d'autres Suppléments, j'ai donné diverses Applications de Géométrie cinématique, afin de faire mieux connaître et de propager une méthode féconde qui me semble digne de l'attention des géomètres.

La dernière Leçon est consacrée aux surfaces topographiques et à leur emploi pour la représentation des Tables.

Tout en me conformant au dernier programme arrêté par le Conseil de perfectionnement, j'ai donc agrandi ma tâche, et mon Cours comprend non seulement l'*Art du trait*, mais tout l'*Enseignement géométrique* de l École.

La partie théorique est ainsi plus développée; mais je me suis rappelé ce que disait l'illustre Lamé en 1840 dans la Préface de la deuxième édition de son *Cours de Physique* : « Les études suivies à l'École Polytechnique sont loin d'être uniquement destinées à faire connaître une suite de calculs, de formules, de figures, de phénomènes physiques et chimiques. Leur utilité principale est d'exercer cette faculté de l'intelligence à laquelle on donne le nom de *raisonnement*. »

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES D'UNE ÉQUATION ET SUR LA SÉPARATION DES RACINES;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Étant donnée une équation du degré m

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

dans laquelle le coefficient de x^m est supposé positif, Newton a fait connaître une méthode très élégante pour déterminer une limite supérieure des racines positives de cette équation; elle consiste, comme on le sait, à déterminer une quantité a qui rende positives toutes les fonctions

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{m-1}(x),\ f^m(x).$$

L'application de la méthode de Newton ne laisse pas que d'être assez longue dans la pratique, le calcul numérique des termes de la suite

$$(2) \qquad f(a),\ f'(a),\ \ldots,\ f^{m-1}(a),\ f^m(a)$$

étant d'autant plus pénible que la connaissance de quelques-uns des termes de cette suite ne facilite en aucune façon le calcul des autres termes.

2. En posant

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

je considérerai la suite des polynômes

$$(3)\quad \begin{cases} f_m(x) = A_0, \\ f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1, \\ f_{m-2}(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1(x) = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}, \\ f(x) = A_0 x^m + A_1 x^m + \ldots + A_{m-1} x + A_m, \end{cases}$$

dont le dernier est précisément le premier membre de l'équation proposée.

Les valeurs que prennent ces polynômes pour une valeur donnée de la variable égale à a se calculent aisément par voie récurrente; on a, en effet, la relation bien connue

$$f_i(a) = a f_{i-1}(a) + A_{m-i},$$

et les quantités

$$f_m(a),\ f_{m-1}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a)$$

se rencontrent d'elles-mêmes quand on veut obtenir le résultat de la substitution de a dans $f(x)$.

Cela posé, *si un nombre positif a rend positifs tous les polynômes de la suite* (3), *ce nombre est une limite supérieure des racines de l'équation* $f(x) = 0$.

On a en effet, identiquement,

$$f(x) = (x - a)\,[f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots + f_1(a)] + f(a),$$

et il est bien clair que, sous les conditions énoncées ci-dessus, le polynôme $f(x)$ a une valeur positive pour toutes les valeurs de x supérieures à a; on peut même ajouter que, pour ces valeurs, $f(x)$ va toujours en croissant avec x, d'où il résulte que a est une limite supérieure des racines de l'équation $f(x) = 0$ et de l'équation $f'(x) = 0$.

3. Pour trouver une limite supérieure des racines de l'équation (1), on essayera donc d'abord la racine α de l'équation

$$f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1 = 0,$$

et l'on calculera de proche en proche les diverses expressions

$$f_{m-2}(\alpha),\ f_{m-3}(\alpha),\ \ldots;$$

ce sont, du reste, les nombres que l'on a à calculer quand on veut trouver la valeur de $f(\alpha)$.

Si tous ces nombres sont positifs, α est une limite des racines de l'équation proposée; sinon, on essayera le nombre entier consécutif et l'on poursuivra les opérations jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre β tel que tous les nombres intermédiaires qui se présentent dans le calcul de $f(\beta)$ soient tous positifs.

4. Comme application, considérons l'équation

$$f(x) = x^5 - 10x^4 - 32x^3 + 7x^2 - 500x - 120 = 0,$$

à laquelle est appliquée la méthode de Newton dans l'*Algèbre* de M. Briot [1].

En cherchant le résultat de la substitution de 10 dans $f(x)$, on rencontre le nombre suivant

$$-32;$$

10 est donc trop faible.

En substituant 11, on obtient les nombres

$$+1,\ +1,\ -21;$$

ce dernier nombre étant négatif, 11 est trop faible.

---

[1] *Leçons d'Algèbre*, 8e édition, p. 298.

18. On peut généraliser la construction décrite plus haut (15) de façon à la rendre applicable aux courbes définies par une équation de la forme

$$\rho = \frac{a \sin \omega}{\omega - \alpha - m \cos n\omega},$$

n désignant un nombre quelconque.

Nous n'insisterons pas sur cette construction.

On peut aussi construire, par un procédé analogue, la tangente à la courbe

$$\rho = \frac{a}{\omega - \alpha - m \cos \omega},$$

ou, plus généralement,

$$\rho = \frac{a}{\omega - \alpha - m \cos n\omega},$$

n désignant toujours un nombre quelconque. Les exemples que nous avons traités suffisent pour mettre le lecteur sur la voie de la méthode à suivre.

SUR LA MACHINE PNEUMATIQUE;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

Il s'agit de calculer la loi de décroissement de la force élastique de l'air contenu dans le récipient d'une machine pneumatique, en tenant compte de l'espace nuisible.

Soient

V le volume du récipient et des conduits;
v celui du corps de pompe quand le piston est au haut de sa course;
u le volume de l'espace nuisible;

H la pression atmosphérique ;
H_0 la pression initiale dans le récipient ;
H_k, en général, la pression après le $k^{\text{ième}}$ coup de piston.

Quand le piston est au bas de sa course, après le $(k-1)^{\text{ième}}$ coup, l'air occupe à la fois le volume V sous la pression H_{k-1} et le volume u sous la pression H ; lorsque le piston est soulevé, le mélange de ces deux masses d'air occupe le volume $V+v$ sous la pression H_k ; la loi du mélange des gaz donne donc la formule

$$(1) \qquad (V+v)H_k = VH_{k-1} + uH.$$

Cette relation n'est pas simple, et c'est ce qui explique le calcul assez lourd et peu accessible aux commençants au moyen duquel on en déduit l'expression générale de H_n.

Mais, si l'on pose

$$(2) \qquad H_k - \frac{u}{v}H = \varepsilon_k,$$

la relation (1) prend la forme expressive

$$(3) \qquad \varepsilon_k = \frac{V}{V+v}\varepsilon_{k-1}.$$

On voit que l'on obtient chaque quantité ε de la précédente en la multipliant par $\frac{V}{V+v}$, et, par suite, qu'en faisant successivement $k = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$(4) \qquad \varepsilon_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \varepsilon_0.$$

C'est la formule connue

$$H_n - \frac{u}{v}H = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \left(H_0 - \frac{u}{v}H\right).$$

Ajoutons qu'il est logique de substituer les quantités ε_k

aux quantités H_i. En effet, dès qu'on a expliqué le jeu de la machine, on montre habituellement, par un raisonnement fort simple, que la force élastique de l'air du récipient ne saurait, à cause de l'espace nuisible, devenir inférieure à $\frac{u}{v}H$, et le calcul de H_n, que l'on fait après, est surtout destiné à prouver que cette force élastique limite $\frac{u}{v}H$ exigerait, pour être atteinte, un nombre infini de coups de piston. Quoi de plus naturel alors que de chercher, au lieu de H_n, son excès sur la pression limite, et par suite de substituer à la relation (1) entre deux forces élastiques consécutives H_{i-1} et H_i la relation (2) entre deux excès consécutifs ε_{i-1} et ε_i? Ce choix, ainsi indiqué, est justifié après coup par la simplicité de la relation (3), qui est aisée à retenir et qui conduit à un calcul déjà fait, puisque le rapport de deux excès consécutifs a la même valeur que le rapport de deux pressions consécutives dans le cas déjà considéré, où l'on fait abstraction de l'espace nuisible.

Des observations analogues s'appliquent au calcul relatif à la machine de compression.

REMARQUE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE COMBINATOIRE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève en Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.

Lorsqu'on se propose de trouver le nombre N_m des points d'intersection des diagonales d'un polygone convexe de m côtés, intérieurs à ce polygone, on cherche à lier ce nombre à celui qui lui correspond N_{m-1} pour un polygone de $m-1$ côtés.

Si l'on cherche le rapport $\frac{N_m}{N_{m-1}}$, on sait que l'on trouve $\frac{N_m}{N_{m-1}} = \frac{m}{m-4}$, d'où l'on déduit facilement la formule connue $N_m = C_m^4$.

Mais il est plus facile de trouver la différence $N_m - N_{m-1}$ que le quotient $\frac{N_m}{N_{m-1}}$; on obtient alors

$$N_m - N_{m-1} = 1(m-3) + 2(m-4) \\ + 3(m-5) + \ldots + (m-3)1.$$

Je me propose de faire voir comment, à l'aide de ce résultat, on peut très facilement arriver à la formule obtenue par la première méthode.

La différence peut s'écrire

$$\begin{aligned} N_m - N_{m-1} = \quad & 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-4) + (m-3) \\ & + 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-4) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 1 + 2 + 3 \\ & + 1 + 2 \\ & + 1 \end{aligned}$$

ou

$$N_m - N_{m-1} = \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} + \ldots \\ + \frac{4.3}{1.2} + \frac{3.2}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}.$$

Cette différence est donc égale à la somme des $m-3$ premiers nombres figurés du deuxième ordre du triangle arithmétique de Pascal; elle est, par suite, égale au $(m-3)^{\text{ième}}$ nombre figuré du troisième ordre de ce triangle. Ainsi,

$$N_m - N_{m-1} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$

$Mx + N$ le reste de la division. Décomposons la fraction

$$\frac{Mx - N}{(x-a)(x-b)}$$

en éléments simples, en sorte que l'on ait

$$\frac{Mx + N}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Soit $\psi(x)$ l'ensemble des termes dont le degré est inférieur à m dans le développement de $\frac{B}{x-b}$ suivant les puissances croissantes de x.

Cela posé, si l'on ordonne suivant les puissances décroissantes de x le polynôme

$$\varphi(x) + \psi(x)$$

et si l'on ajoute à la suite de ce polynôme le terme $\frac{A}{x}$, le nombre des variations que présente la suite ainsi obtenue est au plus égal au nombre des racines de l'équation (1) qui sont comprises entre a et b, et, si ces deux nombres sont différents, ils diffèrent d'un nombre pair.

8. L'application de la proposition précédente, qui n'exige guère que la division de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, me paraît devoir être plus facile que celle de la méthode due à Budan et à Fourier, laquelle exige le calcul pénible des nombres

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots$$

et

$$f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ \ldots.$$

Comme application, je considérerai l'équation

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0,$$

que j'ai déjà traitée plus haut.

Pour avoir une limite du nombre des racines comprises entre $+1$ et $+2$, je divise $f(x)$ par $x^2 - 3x + 2$. On a

$$\frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = x^3 + 3x^2 + 4x + 7 + \frac{5x - 24}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= x^3 + 3x^2 + 4x + 7 + \frac{19}{x - 1} - \frac{14}{x - 2}.$$

En développant $-\frac{14}{x - 2}$ suivant les puissances croissantes de x, l'ensemble des termes du quatrième degré dans le développement est

$$7 + \frac{7x}{2} + \frac{7x^2}{4} + \frac{7x^3}{16} + \frac{7x^4}{32}.$$

Si nous considérons maintenant la suite des termes de l'expression

$$\frac{7}{32}x^4 + \left(\frac{7}{16} + 1\right)x^3 + \left(\frac{7}{4} + 3\right)x^2 + \left(\frac{7}{2} + 4\right)x + 14 + \frac{19}{x},$$

comme elle ne présente aucune variation, nous en concluons que l'équation proposée ne renferme aucune racine entre $+1$ et $+2$.

THÉORÈME SUR LES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A LA FOIS A DEUX CIRCONFÉRENCES;

PAR M. WEILL.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un polygone convexe se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux circonférences, sa surface reste proportionnelle à celle du polygone ayant pour sommets les points de contact des côtés du premier avec la circonférence intérieure.*

Lorsque le polygone ABC... se déplace en restant inscrit à une circonférence fixe et circonscrit à une seconde circonférence fixe ayant O pour centre et R pour rayon, les points de contact a, b, c, ... de ses côtés avec la circonférence O sont les sommets d'un polygone dont les côtés sont tangents à une ellipse ayant le point O pour foyer. Soit F le deuxième foyer de cette ellipse. Joignons le point O à deux sommets consécutifs A et B du polygone; ces deux droites rencontrent respectivement en K et L les côtés ab, bc du polygone des points de contact.

Abaissons du point F les perpendiculaires FN, FM sur ab, bc. Les produits $OK \times OA$ et $OK \times FN$ restent constants pendant le déplacement du polygone. Donc le rapport $\frac{OA}{FN}$ est constant, et le polygone des points M, N, ... est homothétique du polygone ABC....

Le théorème énoncé sera démontré, si nous prouvons que le rapport des surfaces des polygones NM... et abc... est constant. Cela revient à démontrer que le rapport entre la somme des triangles FNM et la somme des triangles NbM est constant.

Désignons par R′ la distance constante du point F au côté NM, et par α l'angle de la droite fixe OF avec la droite Ob. Nous aurons

$$\text{surface FMN} = \tfrac{1}{2}\,\text{NM}.\text{R}',$$

$$\begin{aligned}\text{surface N}b\text{M} &= \tfrac{1}{2}\,\text{NM}(\text{R} - \text{R}' - \text{OF}.\cos\alpha)\\ &= \tfrac{1}{2}\,\text{NM}(\text{R} - \text{R}') - \tfrac{1}{2}\,\text{OF}.\text{NM}.\cos\alpha,\end{aligned}$$

$$\text{surface (MN...)} = \frac{\text{R}'}{2}\,\Sigma\text{NM},$$

$$\text{surface }(\text{N}b\text{M} + \text{M}c\text{S} + \ldots) = \frac{\text{R} - \text{R}'}{2}\,\Sigma\text{NM} - \frac{\text{OF}}{2}\,\Sigma\text{NM}.\cos\alpha.$$

Or l'expression $\Sigma\text{NM}.\cos\alpha$ est égale à zéro; donc le

rapport des deux surfaces considérées est égal à $\frac{R'}{R - R'}$.
On en déduit que le rapport des surfaces des deux polygones (NM...) et (*abc*...) est égal à $\frac{R'}{R}$.

Or, le rapport des surfaces des polygones (NM...) et (ABC...) est égal à $\frac{R'^2}{R^2}$. Donc enfin, le rapport des surfaces des deux polygones (*abc*...) et (ABC...) est égal à $\frac{R'}{R}$.

On peut remarquer que la surface du polygone (*abc*...) est moyenne proportionnelle entre celle du polygone (ABC...) et celle du polygone (NM...).

Dans le cas particulier du triangle, le rapport des surfaces est égal au rapport entre le rayon du cercle inscrit et le diamètre du cercle circonscrit. On en déduit les deux théorèmes suivants :

Théorème. — *La surface d'un triangle est moyenne proportionnelle entre celle du triangle ayant pour sommets les centres des cercles exinscrits et celle du triangle ayant pour sommets les points de contact du cercle inscrit au premier avec ses côtés.*

Théorème. — *Étant donné un triangle* T, *on considère le triangle* T_1, *dont les sommets sont les points de contact des côtés du premier avec le cercle inscrit, et le triangle* T_2, *dont les sommets sont les pieds des hauteurs du deuxième ; on opère sur ce troisième triangle comme sur le premier, et ainsi de suite ; on a, par cette construction, une suite de triangles tels que la surface de l'un d'eux est moyenne proportionnelle entre celles des deux triangles qui le précèdent et le suivent immédiatement.*

SUR LE CERCLE QUI PASSE PAR LES PIEDS DES TROIS NORMALES ABAISSÉES D'UN POINT DE L'ELLIPSE SUR LA COURBE;

PAR M. WEILL.

Appelons x_1, y_1 les coordonnées du point considéré A de l'ellipse. L'équation de l'ellipse étant

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et celle de l'hyperbole équilatère passant par les pieds des normales abaissées du point A étant

$$(a^2 - b^2)xy + b^2y_1x - a^2x_1y = 0,$$

si l'on élimine x entre ces deux équations, on obtient une équation en y du quatrième degré, qui donne les ordonnées du point A et des pieds des trois normales. Cette équation est

$$(1)\qquad y^4(a^2 - b^2)^2 + 2b^2y_1(a^2 - b^2)y^3 + \ldots - b^6y_1^2 = 0.$$

Considérons un cercle quelconque, dont l'équation sera

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + C = 0,$$

et éliminons x entre l'équation de l'ellipse et celle du cercle; nous aurons l'équation

$$(2)\qquad \begin{aligned} y^4(a^2 - b^2)^2 &+ 4\beta(a^2 - b^2)b^2y^3 + \ldots \\ &+ b^4[(C + a^2)^2 - 4a^2\alpha^2] = 0. \end{aligned}$$

Cela posé, rappelons que le cercle qui passe par les pieds des trois normales passe par le point diamétralement opposé au point A. Donc, si le cercle considéré passe par les pieds des trois normales, les équations (1)

et (2) auront respectivement les solutions

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,$$

et

$$-y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,$$

en désignant par y_2, y_3, y_4 les ordonnées des pieds des trois normales.

Dès lors, en formant les sommes des racines dans les équations (1) et (2), et retranchant ces deux sommes, on aura la relation

$$-\frac{2b^2y_1}{a^2-b^2}+\frac{4\beta b^2}{a^2-b^2}=-2y_1,$$

d'où l'on tire

$$\beta=\frac{a^2}{2b^2}y_1\ ,$$

et, par symétrie,

$$\alpha=\frac{b^2}{2a^2}x_1.$$

Considérons maintenant les produits des racines dans les équations (1) et (2), et faisons le quotient de ces deux produits ; nous aurons

$$-\frac{b^4y_1^2}{b^4[(C+a^2)^2-4a^2\alpha^2]}=-1,$$

d'où l'on tire

$$(C+a^2)^2=b^2y_1^2+\frac{b^4}{a^2}x_1^2=b^4,$$

$$C=-(a^2+b^2).$$

L'équation du cercle est donc

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}x_1-\frac{a^2}{b^2}y_1=a^2+b^2.$$

On voit que son centre décrit une ellipse quand le point A se meut sur l'ellipse donnée, et qu'il rencontre

suivant un diamètre le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.

Remarque. — Cherchons les coordonnées du centre G des moyennes distances des pieds des trois normales.

L'équation (1) nous donne

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{2b^2 y_1}{a^2 - b^2},$$

d'où l'on tire

$$y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} y_1.$$

Les coordonnées du point G sont donc

$$y' = -\frac{y_1}{3}\frac{a^2 + b^3}{a^2 - b^2},$$

$$x' = \frac{x_1}{3}\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

On voit que le symétrique de ce point par rapport au grand axe est situé sur la droite qui joint le point A au centre de l'ellipse.

Quand le point A se meut sur l'ellipse, le point G décrit une ellipse concentrique et homothétique.

En désignant par X, Y les coordonnées du point de concours des hauteurs du triangle formé par les pieds des trois normales, on a

$$X = 3x' - 2a = x_1 \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{b^2}{a^2} x_1 = x_1 \frac{a^4 + b^4}{a^2(a^2 - b^2)},$$

$$Y = -y_1 \frac{a^4 + b^4}{b^2(a^2 - b^4)}.$$

On a donc facilement l'équation de l'ellipse décrite par ce point.

SUR LES QUESTIONS 699, 799, 800, 932 ET 1316, CONCERNANT LES CYCLOIDES ET ÉPICYCLOIDES;

PAR M. G. FOURET,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Les questions que je viens de rappeler ont entre elles un lien très intime qu'il m'a paru intéressant de signaler.

L'énoncé de la question 1316 (2e série, t. XVII, p. 336) est le suivant :

On prend sur la tangente à une cycloïde fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle au rayon de courbure en ce point : trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur, quand la tangente se déplace.

(BARBARIN.)

Le lieu, comme l'a trouvé M. Lez (2e série, t. XVIII, p. 475), est une cycloïde; on voit en outre aisément que c'est toujours une cycloïde allongée. Mais il y a plus : le même lieu, pour une épicycloïde ordinaire, est aussi une épicycloïde allongée. Cette propriété, ainsi généralisée, n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème suivant, qui a fait l'objet de la question 932 (2e série, t. VIII, p. 192):

Le lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné, construits sur les rayons de courbure d'une épicycloïde (cycloïde) ordinaire et d'un même côté de ces rayons de courbure, est une épicycloïde (cycloïde) allongée ou raccourcie.

M. Moret-Blanc a donné de ce théorème une dé-

monstration géométrique simple et ingénieuse (2e série, t. XIV, p. 71), dont on peut tirer quelques conséquences intéressantes. En conservant les notations de M. Moret-Blanc ([1]), on peut se proposer de trouver, pour chaque position du cercle mobile qui engendre l'épicycloïde donnée E, sur quel lieu doivent se trouver les centres c' des cercles mobiles engendrant les épicycloïdes qui s'en déduisent d'après l'énoncé du théorème, pour que ces épicycloïdes soient semblables entre elles, c'est-à-dire allongées ou raccourcies dans le même rapport.

On trouve aisément l'équation polaire du lieu des points c', en prenant pour pôle le point n de contact des deux cercles générateurs de l'épicycloïde E et pour axe polaire la droite nc joignant ce point de contact au centre du cercle mobile. On obtient ainsi l'équation

$$(1)\quad \rho^2 - 2\frac{\lambda^2 a^2 r^2}{(a+r)^2-\lambda^2 a^2}\rho\cos\omega - \frac{\lambda^2 a^2 r^2}{(a+r)^2-\lambda^2 a^2} = 0,$$

dans laquelle ρ et ω désignent les coordonnées polaires d'un point quelconque du lieu, a et r les rayons respectifs on et cn des cercles mobile et fixe servant à engendrer l'épicycloïde E, λ un paramètre positif qui définit le degré d'allongement ou de raccourcissement de la nouvelle épicycloïde, et qui est égal au rapport $\frac{c'm'}{c'n'}$ de la distance du point décrivant au centre du cercle mobile divisé par le rayon de ce cercle, de telle sorte que l'épicycloïde est ordinaire, allongée ou raccourcie suivant que l'on a $\lambda = 1$, $\lambda > 1$, $\lambda < 1$.

On voit immédiatement que l'équation (1) est celle

([1]) Le lecteur est prié de se reporter à l'article de M. Moret-Blanc.

d'un cercle d'un rayon égal à $\frac{\lambda ar(a+r)}{(a+r)^2 - \lambda^2 a^2}$, et dont le centre est situé sur nc, à une distance du point n égale à $\frac{\lambda^2 a^2 r^2}{(a+r)^2 - \lambda^2 a^2}$. Les cercles correspondant aux diverses valeurs de λ ont pour axe radical commun la perpendiculaire élevée sur le milieu du rayon on.

De la similitude des triangles mnm', cnc', on conclut immédiatement que, pour chaque position de la figure mobile, le lieu des points m' qui décrivent des épicycloïdes semblables est un cercle ayant son centre sur la normale à l'épicycloïde E. Les divers cercles ainsi obtenus pour diverses valeurs de λ ont pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée du point o sur la normale à l'épicycloïde E. Les points de cet axe radical, considérés comme sommets de triangles constamment semblables à eux-mêmes et construits sur les rayons de courbure de l'épicycloïde E, décrivent des épicycloïdes ayant un point multiple en O. Le cercle dont les points décrivent des épicycloïdes ordinaires est le cercle Ω décrit sur le rayon de courbure de l'épicycloïde E comme diamètre, car les deux extrémités de ce rayon de courbure décrivent, l'un l'épicycloïde E, l'autre sa développée, qui, comme on le sait, est une épicycloïde semblable. Un point quelconque, pris comme sommet d'un triangle constamment semblable à un triangle donné et ayant pour base le rayon de courbure de l'épicycloïde E, décrira une épicycloïde allongée ou raccourcie, suivant qu'il sera à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle Ω [1].

Cherchons maintenant l'enveloppe des droites menées par les divers points de l'épicycloïde E, de manière à

[1] Ceci explique pourquoi le lieu faisant l'objet de la question 1316 est une cycloïde allongée.

faire un angle constant, dans un sens déterminé, avec les tangentes correspondantes de l'épicycloïde. D'après une construction bien connue, due à Réaumur, le point de contact d'une pareille droite avec son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du centre de courbure de la courbe donnée. En appliquant cette construction à l'épicycloïde E, on voit que les points de l'enveloppe considérée sont les sommets de triangles rectangles constamment semblables à eux-mêmes et ayant pour hypoténuses respectives les rayons de courbure de cette épicycloïde : ces points, pour chaque position du cercle mobile, sont, par conséquent, situés sur le cercle Ω, et l'on en conclut que le lieu qu'ils forment, c'est-à-dire l'enveloppe définie plus haut, est une épicycloïde ordinaire semblable à l'épicycloïde E. La même propriété subsiste pour la cycloïde, dont on déduit de cette manière une cycloïde égale, et l'on a ainsi démontré les deux théorèmes suivants, qui ont fait l'objet des questions 799 et 800 (2e série, t. VI, p. 96) (1) :

L'enveloppe des droites coupant une cycloïde sous un angle constant est une cycloïde égale.

L'enveloppe des droites coupant une épicycloïde sous un angle constant est une épicycloïde semblable (2).

Le théorème énoncé dans la question 932 comprend, comme cas particulier, le suivant :

---

(1) *Voir* également le *Bulletin de la Société philomathique*, 6e série, t. V, p. 91 (année 1865).

(2) M. Rouquet a donné une démonstration de ces théorèmes (2e série, t. VI, p. 380). Elle est exacte en ce qui concerne la cycloïde, mais elle ne l'est pas pour l'épicycloïde; en se reportant à la figure, il est facile de voir, en effet, que l'égalité des angles OGM et OCP, sur laquelle elle s'appuie, n'a généralement pas lieu.

Le lieu des points qui divisent dans un rapport constant les rayons de courbure d'une épicycloïde ordinaire, est une épicycloïde allongée ou raccourcie.

Ce dernier énoncé peut se transformer, en remarquant qu'il y a proportionnalité entre le rayon de courbure d'une épicycloïde ordinaire et la portion de la normale à cette épicycloïde comprise entre son pied sur la courbe et l'un de ses points de rencontre avec le cercle générateur fixe. On obtient ainsi un nouveau théorème qui s'étend, comme je l'ai déjà montré ailleurs ([1]), à une épicycloïde quelconque, allongée ou raccourcie, et qui peut s'énoncer ainsi :

Le lieu des points qui divisent dans un rapport constant les portions des normales d'une épicycloïde (ordinaire, allongée ou raccourcie) comprises entre leur pied sur la courbe et l'un de leurs points de rencontre avec le cercle générateur fixe est une épicycloïde.

Dans le cas de la cycloïde, le théorème est le suivant :

Le lieu des points qui divisent dans un rapport constant les normales d'une cycloïde (ordinaire, allongée ou raccourcie) est une cycloïde (allongée ou raccourcie).

Comme on sait que les cycloïdes et épicycloïdes, allongées ou raccourcies, ont leurs arcs exprimables en arcs d'ellipse, le théorème que nous venons d'énoncer explique et démontre le suivant (question 699, 2e série, t. III, p. 141) :

En partageant dans un rapport constant les normales d'une cycloïde quelconque (ordinaire, allongée

---

([1]) *Bulletin de la Société philomathique*, 6e série, t. V, p. 88.

ou raccourcie), on obtient une courbe dont les arcs sont exprimables en arcs d'ellipse.

(MANNHEIM.)

Une démonstration analytique directe et très simple de cette dernière propriété a été donnée il y a quelques années (2e série, t. IV, p. 155). On peut l'étendre facilement à la propriété analogue de l'épicycloïde.

SUR LE CENTRE ET LE RAYON DE COURBURE EN UN POINT D'UNE CONIQUE;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

On sait que, si ρ désigne la longueur du rayon de courbure en un point d'une conique, n celle de la normale en ce point, on a

$$\rho = \frac{n^3}{p^2},$$

p désignant le paramètre de la courbe. On déduit de cette formule une construction du centre de courbure; mais on peut, par les considérations très élémentaires et peut-être nouvelles que nous allons donner, arriver à déterminer très simplement le centre et le rayon de courbure en un point d'une conique.

1. Soient M le point de la courbe, AB la tangente en ce point: le cercle osculateur au point M rencontre la conique en un point L, et la droite ML, par une propriété connue, est symétrique de la tangente AB par rapport aux parallèles aux axes menées par M. Soit M' le point symétrique de M par rapport à Oy; la tangente en M' sera donc symétrique de AB par rapport à Oy, et par suite

parallèle à ML : le diamètre OM′ passe donc par le milieu K de ML. De cette remarque on déduit la construction suivante :

Soit M *un point d'une conique à centre ; la tangente en ce point rencontre l'axe* Ox *en un point* A ; *ayant abaissé du point* M *sur* Ox *la perpendiculaire* MP, *on prend* PA′ = PA ; *la droite* MA′ *rencontre la droite symétrique de* OM, *par rapport à* Ox, *en un point* K, *et le centre de courbure est à l'intersection de la normale en* M *avec la perpendiculaire élevée au point* K *à la droite* MA′.

Cette remarque est en défaut quand le point M est un des sommets de la courbe ; mais il existe, pour ces points particuliers, une construction simple et trop connue pour qu'il soit nécessaire de la rappeler ici.

Dans le cas de la parabole, on modifie la règle précédente en prenant le point M′ symétrique du point donné M par rapport à l'axe Ox, et en menant par ce point une parallèle à l'axe ; la construction s'achève comme pour les coniques à centre.

2. Nous allons maintenant donner une expression du rayon de courbure qui permet de construire cette ligne par une quatrième proportionnelle. Nous supposerons que la conique proposée est une ellipse ou une hyperbole, nous réservant de faire au sujet de la parabole une remarque particulière.

Appelons α l'angle aigu que fait avec Ox la tangente au point M ; ω étant le centre de courbure, le triangle rectangle MKω donne

$$\text{MK} = \rho \sin 2\alpha,$$

ρ étant le rayon de courbure. D'ailleurs, le triangle

MM'K donne (¹)

$$\frac{\text{MK}}{\sin\beta} = \frac{2x'}{\sin(\alpha+\beta)},$$

β étant l'angle MOx. Cette relation peut s'écrire

$$\text{MK} = \frac{2x'}{\sin\alpha\cot\beta + \cos\alpha},$$

et, comme

$$\cot\beta = \frac{x'}{y'},$$

on a

$$\rho = \frac{2x'y'}{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}\,\frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Abaissons du point O la perpendiculaire OH sur AB; on aura

$$\text{OH} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

et, si l'on remarque enfin que

$$\text{MA} = \frac{y'}{\sin\alpha},\quad \text{MB} = \frac{x'}{\cos\alpha},$$

on arrive à cette expression remarquable du rayon de courbure

$$\rho = \frac{\text{MA}.\text{MB}}{\text{OH}},$$

expression qui peut se traduire par l'énoncé suivant:

Théorème. — *Le rayon de courbure en un point d'une conique à centre est une quatrième proportionnelle aux segments comptés sur la tangente depuis le point de contact jusqu'à la rencontre de celle-ci avec les axes et à la distance du centre à la tangente.*

3. Dans le cas de la parabole, les considérations géo-

(¹) x', y' désignent, dans ce qui suit, les coordonnées du point M.

métriques que nous venons d'appliquer conduisent à l'expression

$$\rho = \frac{\text{MA}}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

dans laquelle MA est la longueur de la tangente comptée depuis le point de contact M jusqu'à la rencontre de celle-ci avec l'axe de la courbe, et α l'angle aigu de la tangente avec Ox. Des considérations évidentes conduisent à la propriété suivante :

Théorème. — *La corde interceptée dans la parabole par un cercle osculateur de cette courbe est quadruple de la longueur de la tangente au point de contact du cercle et de la courbe, longueur comptée depuis le point de contact jusqu'à la rencontre de cette tangente avec l'axe de la courbe.*

THÉORÈME D'ALGÈBRE;

Par M. G. de LONGCHAMPS.

Théorème. — *Si l'on désigne par* $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ *les* p *premiers coefficients d'une équation, coefficients supposés positifs, et par* N *et* N' *les deux coefficients négatifs les plus élevés, le nombre*

$$Z = 1 + \frac{N + N'}{2A_0 + 2A_1 + \ldots + 2A_{p-2} + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

Nous rappellerons d'abord une règle très simple pour trouver une limite supérieure des racines positives. Cette

règle, qui est *une règle de Maclaurin perfectionnée,* mais plus commode et souvent plus puissante que celle qu'on désigne communément ainsi, est due à M. Laguerre. Elle s'énonce ainsi : *Si* N *désigne la valeur absolue du plus grand coefficient négatif et* $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ *les coefficients positifs qui précèdent le premier coefficient négatif,*

$$1 + \frac{N}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

Cela admis, posons

$$0 = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots \\ + A_{p-1} x^{m-p+1} - A_p x^{m-p} + \ldots + A_m,$$

et remarquons que l'équation

$$\varphi(x) = (x+1) f(x) = 0$$

aura les mêmes racines positives que la proposée. Or

$$\varphi(x) = A_0 x^{m+1} + (A_1 + A_0) x^m + \ldots \\ + (A_{p-1} + A_{p-2}) x^{m-p} + \ldots,$$

et le plus grand coefficient négatif de φ est, dans le cas le plus défavorable qu'on puisse imaginer, $N + N'$, N et N' désignant les deux plus grands coefficients négatifs de f. Appliquons à l'équation φ la règle de M. Laguerre : le nombre

$$1 + \frac{N + N'}{2A_0 + 2A_1 + \ldots + 2A_{p-2} + A_{p-1}}$$

sera une limite supérieure des racines positives de l'équation φ, et par suite de l'équation f.

Exemple. — Considérons l'équation

$$f: \quad x^5 + q^2 x^4 + q x^3 - q^3 x^2 - x - 1 = 0,$$

dans laquelle nous supposerons $q = 100$, pour fixer les idées.

La règle de Maclaurin ordinaire donne une limite égale à

$$q^3 + 1 = 1000001;$$

la règle de Maclaurin perfectionnée,

$$q + 1 = 101;$$

celle de M. Laguerre,

$$1 + \frac{q^3}{q^2 + q + 1} = \frac{q^3 + q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} = q + \frac{1}{q^2 + q + 1},$$

c'est-à-dire $q + 1$, comme la précédente; enfin celle que nous proposons,

$$1 + \frac{q^3 + 1}{2q^2 + q + 2} = \frac{q^3 + 2q^2 + q + 3}{2q^2 + q + 2},$$

ou, en prenant le nombre entier supérieur,

$$\frac{q}{2} + 1 = 51.$$

Remarque. — L'exemple que nous avons choisi est un de ceux où notre méthode perfectionne la règle de M. Laguerre; mais il n'en est pas nécessairement et toujours ainsi. Par exemple, si $N = N'$, ce qui est, il est vrai, le cas le plus défavorable à notre règle, on reconnaît sans peine que celle-ci est en infériorité. Il y a supériorité toutes les fois que l'inégalité

$$\frac{N}{A_0 + \ldots + A_{p-1}} > \frac{N'}{A_0 + \ldots + A_{p-1}}$$

est satisfaite.

PROPRIÉTÉ DES COURBES OU DES SURFACES DU SECOND ORDRE HOMOFOCALES;

PAR M. G. KOENIGS,
Élève de l'École Normale supérieure.

Trois coniques A, B, C sont liées par la condition que les deux premières soient polaires réciproques par rapport à la troisième; N et Δ désignant un point du plan et sa polaire par rapport à la conique C, on a le théorème suivant :

Les tangentes issues du point N *à la conique* A, *les coniques* B *et* C *marquent sur la droite* Δ *trois couples de points en involution.*

En effet, soient x et y les points doubles de l'involution déterminée sur la droite Δ par les coniques B et C. Ces points étant conjugués par rapport à ces deux coniques, on voit que : 1° leurs polaires par rapport à la conique C sont les droites Ny et Nx; 2° ces droites Nx et Ny sont conjuguées par rapport à la conique A, puisque leurs pôles y et x par rapport à C sont conjugués par rapport à B, et que cette conique B est précisément la polaire réciproque de A par rapport à la conique C. Le faisceau formé par les tangentes issues du point N à la conique A et par les droites Nx, Ny est donc harmonique, ce qui montre que les traces de ces tangentes sur la droite Δ divisent harmoniquement le segment xy, et cela suffit pour démontrer le théorème.

Désignons, suivant l'usage, par $\boxed{AC}$ le quadrilatère circonscrit commun aux deux coniques A et C.

On voit que Nx et Ny sont les rayons doubles du

faisceau involutif de tangentes issues du point N aux coniques inscrites dans le quadrilatère $\boxed{AC}$.

Du reste, le théorème précédent énonce que, si M et M′ sont les points de rencontre de la conique B avec la droite Δ, NM et NM′ sont deux tangentes issues du point N à une même conique inscrite dans le quadrilatère $\boxed{AC}$.

Imaginons actuellement que le système des coniques inscrites dans le quadrilatère soit homofocal ; les droites Nx et Ny seront les bissectrices de l'angle formé par un couple quelconque de tangentes issues du point N.

Le théorème ci-dessus prend alors la forme suivante :

Soit un point N *du plan ; sa polaire* Δ *par rapport à une conique* C *donnée coupe cette conique en des points* Q *et* Q′ ; *elle coupe aussi en* M *et* M′ *une conique* B, *polaire réciproque par rapport à* C *d'une conique quelconque homofocale à* C : *les angles* MNQ, M′N′Q′ *sont égaux.*

Ce théorème renferme le suivant, dû à M. Laguerre :

Soit un point N *du plan ; sa polaire* Δ *par rapport à une conique* C *donnée coupe cette conique en des points* Q *et* Q′ ; *elle coupe aussi en* M *et* M′ *le cercle* B, *lieu des points d'où la conique* C *est vue sous un angle droit : les angles* MNQ, M′NQ′ *sont égaux.*

Ce théorème résulte du précédent, car le cercle B est, on le sait, la polaire réciproque par rapport à C d'une conique homofocale.

Mais ce qui paraît plus intéressant, c'est l'extension de ce théorème aux surfaces du second ordre.

Soient A, B, C trois surfaces du second ordre liées par la condition que les deux premières soient polaires réciproques par rapport à la troisième ; désignons par N

et Π un point et son plan polaire par rapport à la surface C. On a ce théorème :

Le cône circonscrit à A *et de sommet* N, *les surfaces* B *et* C *tracent sur le plan* Π *trois coniques ayant le même triangle conjugué commun.*

La démonstration est analogue à celle qui a été faite plus haut; il est donc inutile de la recommencer. Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que, en désignant par x, y, z les sommets de ce triangle, les plans Nzy, Nxz, Nyx sont les plans tangents au point N aux trois surfaces du second ordre qui passent par ce point en étant inscrites dans la développable commune aux deux surfaces A et C. On sait que ces trois plans sont rectangulaires dans le cas où les surfaces A et C sont homofocales. Les droites Nx, Ny, Nz sont alors rectangulaires, et tout cône ayant pour sommet le point N et pour base une conique ayant le triangle xyz comme triangle conjugué admet les trois droites ci-dessus pour axes.

De là ce théorème :

Étant donné un point N, *son plan polaire par rapport à une surface* C *du second ordre coupe suivant une conique* Q *cette surface et suivant une conique* M *la réciproque* B *par rapport à* C *d'une homofocale à* C : *les cônes ayant leur sommet au point* N *et ayant* Q *et* M *pour bases ont les mêmes axes.*

SUR UNE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE STURM;

PAR M. CH. BIEHLER,

Directeur des études à l'École préparatoire du collège Stanislas.

L'application de la méthode de Sturm à l'équation de degré m qui fournit les m valeurs de tang $\frac{\alpha}{m}$, quand on

connaît $\tang \alpha$, donne lieu à une remarque qui offre quelque intérêt.

Si l'on pose

$$\tang \alpha = a, \quad \tang \frac{\alpha}{m} = x,$$

l'équation dont il s'agit est

$$a = \frac{(1 + ix)^m - (1 - ix)^m}{i[(1 + ix)^m + (1 - ix)^m]},$$

et, mise sous forme entière, elle devient

$$(1 + ix)^m (1 - ia) - (1 - ix)^m (1 + ia) = 0.$$

Le premier membre de cette équation renferme i en facteur. Soit

(1) $$iU_m = (1 + ix)^m (1 - ia) - (1 - ix)^m (1 + ia),$$

et désignons généralement par iU_μ le polynôme

$$iU_\mu = (1 + ix)^\mu (1 - ia) - (1 - ix)^\mu (1 + ia);$$

on a entre U_m, U_{m-1}, U_{m-2} la relation

(2) $$U_m - 2U_{m-1} + (1 + x^2) U_{m-2} = 0.$$

On obtient cette relation en multipliant membre à membre l'équation (1) et la suivante

(3) $$2 = (1 + ix) + (1 - ix),$$

et en changeant dans le résultat obtenu m en $m - 1$.

C'est l'équation (2) qui va nous permettre d'établir, par la méthode de Sturm, la réalité de toutes les racines de l'équation

$$U_m = 0.$$

De l'équation (2) on tire en effet, par le changement de m en $m - 1$, $m - 2, \ldots, 3, 2$, les suivantes :

(4) $$\left\{ \begin{array}{ll} U_m & = 2U_{m-1} - (1 + x^2) U_{m-2}, \\ U_{m-1} & = 2U_{m-2} - (1 + x^2) U_{m-3}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_2 & = 2U_1 \quad - (1 + x^2) U_0. \end{array} \right.$$

Ces fonctions U jouissent des propriétés suivantes :

1° U_0 est une constante, $U_0 = -2a$;

2° Deux fonctions consécutives U_μ, $U_{\mu-1}$ ne peuvent s'annuler pour une même valeur de x, car U_0 devrait s'annuler, ce qui est impossible d'après ce qui précède;

3° Si une fonction U_μ s'annule pour une certaine valeur de x, les deux fonctions $U_{\mu-1}$, $U_{\mu+1}$ sont de signes contraires.

On en conclut que, si la suite des fonctions

$$U_m, \quad U_{m-1}, \quad \ldots, \quad U_1, \quad U_0$$

présente k variations pour $x = \alpha$ et k' variations pour $x = \alpha'$, il y a au moins $k - k'$ racines réelles de l'équation $U_m = 0$ entre α et α' si k est supérieur à k', et $k' - k$ racines réelles si k est inférieur à k'.

Pour les formes $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ du nombre entier μ, les coefficients du terme de degré le plus élevé de U_μ sont respectivement

$$-2a, \quad +2, \quad +2a, \quad -2.$$

On voit donc que, si $a > 0$, la suite

(5) $$U_0, \quad U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_m$$

donne, pour $x = -\infty$, la succession des signes

$$- \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad \ldots$$

et, pour $x = +\infty$, la nouvelle succession

$$- \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad \ldots;$$

dans chacune des deux suites les signes n'alternent que de deux en deux, et, si $a < 0$, on a :

pour $x = -\infty$, $+ \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad \ldots,$

pour $x = +\infty$, $+ \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad \ldots.$

Si donc m est pair, le nombre des variations que présente la suite (5) pour $x = -\infty$ est le même que celui qu'elle présente pour $x = +\infty$; dans chaque cas, ce nombre est égal à $\frac{m}{2}$; la quantité $k - k'$ dont il a été question est donc égale à zéro, et la méthode de Sturm semble indiquer que l'équation $U_m = 0$ n'a pas de racines réelles.

Mais, si l'on fait $x = 0$ dans toutes les fonctions de la suite (5), toutes les fonctions de cette suite prennent la même valeur $-2a$; pour $x = -\infty$, la suite (5) présente $\frac{m}{2}$ variations; pour $x = 0$, elle n'offre plus que des permanences : la suite (5) a donc *perdu* $\frac{m}{2}$ variations.

L'équation $U_m = 0$ a donc au moins $\frac{m}{2}$ racines négatives.

Pour $x = +\infty$, la suite (5), présentant $\frac{m}{2}$ variations, en a *gagné* $\frac{m}{2}$ quand x a varié de zéro à $+\infty$.

L'équation $U_m = 0$ a donc au moins $\frac{m}{2}$ racines positives, et, comme elle n'est que de degré m, toutes ces racines sont réelles et il y en a autant de positives que de négatives.

Si m est impair, on voit aisément que, dans le cas de $a > 0$, l'équation $U_m = 0$ a $\frac{m+1}{2}$ racines positives et $\frac{m-1}{2}$ racines négatives; et inversement, si $a < 0$, l'équation $U_m = 0$ a $\frac{m+1}{2}$ racines négatives et $\frac{m-1}{2}$ racines positives.

L'équation $U_m = 0$ a donc, dans tous les cas, toutes ses racines réelles.

Nous avons vu que, si l'on substitue dans la suite (5) successivement $-\infty$ et $+\infty$, le nombre des variations gagnées ou perdues est zéro dans le cas de m pair et 1 dans le cas de m impair.

Cela tient à ce que le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ passe du négatif au positif quand x, en croissant, traverse une racine négative de $U_m = 0$; au contraire, le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ passe du positif au négatif quand x, en croissant, traverse une racine positive de $U_m = 0$. Car la suite (5) perd des variations quand x croît de $-\infty$ à zéro; elle en gagne quand x croît de zéro à $+\infty$.

Il est aisé de démontrer directement que le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ jouit de cette intéressante propriété.

Si l'on prend les dérivées des deux membres de l'égalité (1), il vient

$$(6)\qquad U'_m = m[(1+ix)^{m-1}(1-ia) + (1-ix)^{m-1}(1+ia)],$$

et, si l'on multiplie (6) par l'identité

$$(7)\qquad 2ix = (1+ix) - (1-ix),$$

membre à membre, il viendra

$$(8)\qquad 2xU'_m = mU_m - m(1+x^2)U_{m-2}.$$

Cette équation, combinée avec l'équation (2), savoir

$$U_m = 2U_{m-1} - (1+x^2)U_{m-2},$$

donne

$$(9)\qquad xU'_m + mU_{m-1} - mU_m = 0,$$

d'où

$$\frac{U_{m-1}}{U_m} = 1 - \frac{x}{m}\frac{U'_m}{U_m}.$$

On sait que, lorsque x, en croissant, traverse une des racines de $U_m = 0$, le rapport $\frac{U'_m}{U_m}$ passe toujours du négatif au positif.

Pour une valeur de x voisine d'une des racines de l'équation $U_m = 0$, le signe de $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ est celui de $-x\frac{U'_m}{U_m}$, car cette quantité peut devenir en valeur absolue aussi grande qu'on le veut.

On voit donc que, lorsque x, en croissant, traverse une racine négative de $U_m = 0$, le rapport $-x\frac{U'_m}{U_m}$ passe du négatif au positif comme $\frac{U'_m}{U_m}$; mais, lorsque x traverse en croissant une racine positive de $U_m = 0$, le rapport $-x\frac{U'_m}{U_m}$, et par suite aussi $\frac{U_{m-1}}{U_m}$, passe du positif au négatif.

La méthode de Sturm est donc applicable séparément à chacun des deux intervalles de $-\infty$ à zéro et de zéro à $+\infty$, et elle met ainsi en évidence la réalité de toutes les racines de l'équation $U_m = 0$.

On voit de plus qu'elles sont inégales. En effet, l'équation (9) montre que toute racine multiple de $U_m = 0$ annulerait U_{m-1}, et par suite, d'après (4), elle annulerait $U_{m-2}, U_{m-3}, \ldots, U_0$. Or $U_0 = -2a$; par conséquent, U_0 ne peut s'annuler et l'équation $U_m = 0$ n'a que des racines simples.

ERRATUM.

Tome XVIII, 2e série, p. 170, *au lieu de* p. 287, *lisez* p. 387.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1878;

PAR M. GAMBEY.

On donne une sphère S, *un plan* P *et un point* A; *par le point* A *on mène une droite qui rencontre le plan* P *en un point* B, *puis sur* AB *comme diamètre on décrit une sphère* S'; *le plan radical des sphères* S *et* S' *rencontre la droite* AB *en un point* M:

1° *Trouver le lieu décrit par le point* M *quand la droite* AB *tourne autour du point* A;

2° *Discuter le lieu du point* M *en supposant que le point* A *se déplace dans l'espace, le point* P *et la sphère* S *restant fixes.*

Je prends le plan P pour plan des xy et je fais passer l'axe des z par le centre de la sphère S.

Soient :

α, β, γ les coordonnées du point A;
h le z du centre de S;
r son rayon.

Les équations d'une droite quelconque AB passant en A étant prises sous la forme

$$x - \alpha = m(z - \gamma),$$
$$y - \beta = n(z - \gamma),$$

on en déduit, pour les coordonnées du point milieu du segment AB,

$$\alpha - \frac{m\gamma}{2}, \quad \beta - \frac{n\gamma}{2}, \quad \frac{\gamma}{2},$$

et, pour l'équation de la sphère S',

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 + m\gamma(x-\alpha) + n\gamma(y-\beta) - \gamma z = 0.$$

D'ailleurs, l'équation de S est

$$x^2+y^2+(z-h)^2-r^2=0.$$

Retranchant ces équations membre à membre, il vient, pour l'équation du plan radical des sphères S et S',

$$\begin{aligned} m\gamma(x-\alpha)+n\gamma(y-\beta)-2\alpha x-2\beta y \\ +(2h-\gamma)z+\alpha^2+\beta^2+r^2-h^2=0. \end{aligned}$$

En éliminant m et n entre cette équation et celles de la droite AB, on obtiendra l'équation du lieu cherché. Cette élimination est immédiate, et l'on obtient, après quelques calculs et réductions,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma(x^2+y^2)+(2h-\gamma)z^2-2\beta yz-2\alpha xz \\ &\qquad +(S+2K^2)z-K^2\gamma=0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2h\gamma+h^2-r^2=S \quad \text{et} \quad r^2-h^2=K^2,$$

avec l'hypothèse $r>h$.

Propriétés générales du lieu. — L'équation (1) représente une surface du second ordre qui passe au point A. Cette surface admet comme plans cycliques les plans parallèles au plan P, et le point A est un de ses ombilics, car, pour $z=\gamma$, on obtient le cercle-point

$$z=\gamma, \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0.$$

L'équation (1) pouvant encore s'écrire des deux manières suivantes,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma(x^2+y^2-K^2) \\ &\quad -z[2\alpha x+2\beta y+(\gamma-2h)z-S-2K^2]=0, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma[x^2+y^2+(z-h)^2-r^2] \\ &\quad -z[2\alpha x+2\beta y+2(\gamma-h)z-2h\gamma-S-2K^2]=0, \end{aligned} \right.$$

on en conclut que la surface qu'elle représente contient

les courbes planes intersections du cylindre

$$x^2 + y^2 - K^2 = 0$$

avec les deux plans

$$z = 0, \quad 2\alpha x + 2\beta y + (\gamma - 2h)z - S - 2K^2 = 0,$$

ainsi que celles qui résultent de l'intersection de la sphère S et des plans

$$z = 0, \quad 2\alpha x + 2\beta y + 2(\gamma - h)z - 2h\gamma - S - 2K^2 = 0.$$

La surface (3) et la sphère S sont donc doublement tangentes. On voit en outre que le plan

$$2\alpha x + 2\beta y + 2(\gamma - h)z - 2h\gamma - S - 2K^2 = 0$$

est parallèle au plan polaire du point A par rapport à la sphère S.

Discussion. — J'emploie la transformation en carrés. Mettant tout de suite de côté le cas où le point A est dans le plan P, cas auquel l'équation (1) se décompose en deux facteurs linéaires dont l'un désigne le plan P, je suppose γ différent de zéro.

Je multiplie par γ, ce qui permet de former immédiatement deux carrés. L'équation (1) peut alors s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} (\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2 \\ \quad - (S + K^2)z^2 + \gamma(S + 2K^2)z - K^2\gamma = 0. \end{cases}$$

Si l'on a $S + K^2 = 0$, c'est-à-dire si le point A est sur la sphère concentrique à la sphère S et tangente au plan P, l'équation du lieu est ramenée au type

$$M^2 + N^2 + P = 0;$$

elle représente alors un *paraboloïde elliptique*.

Si l'on a en outre $S = 0$, ce qui suppose $r = h$, le lieu se compose de la droite réelle intersection des deux

plans imaginaires

$$(\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2 = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait $S + K^2$ différent de zéro. On peut alors multiplier (4) par $S + K^2$ et l'écrire ainsi :

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} (S + K^2)[(\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2] \\ \qquad - [(S + K^2) z + \frac{\gamma}{2}(S + 2K^2)]^2 = -\gamma^2 S^2. \end{array} \right.$$

Elle rentre alors dans le type des surfaces à centre unique.

Distinguons deux cas, et, pour abréger, posons $S + K^2 = S_1$.

1° $S \gtrless 0$. — Si l'on a $S_1 > 0$, c'est-à-dire si le point A est extérieur à la sphère concentrique à la sphère S et tangente au plan P, la surface est un *hyperboloïde à une nappe*.

Si au contraire on a $S_1 < 0$, c'est-à-dire si le point A est intérieur à la même sphère, la surface est un *ellipsoïde réel*.

Le cas de $S_1 = 0$ a déjà été examiné.

2° $S = 0$. — Pour $S_1 > 0$, on a un *cône réel*. Cela suppose $r > h$, ce qui est justement notre hypothèse.

Si l'on supposait $r < h$, le cône deviendrait imaginaire.

Ainsi, lorsque le point A est dans la région de l'espace extérieure à la sphère concentrique à S et tangente à P, le lieu est un hyperboloïde à une nappe.

Si ce point est dans la région intérieure à la même sphère, le lieu est un ellipsoïde.

Enfin, si le point A est sur la surface séparative, le lieu est un paraboloïde elliptique.

Dans le cas où le point A est situé sur la sphère

donnée, l'hyperboloïde se confond avec son cône asymptote.

Note. — La même question a été résolue par MM. Duranton, professeur au lycée du Puy; A. Leinekugel.

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE
(Faculté de Paris, juillet 1879);

PAR M. H. COURBE.

Étant donné le paraboloïde défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$z = \frac{mx^2 + y^2}{2a},$$

on considère sur cette surface les courbes dont les tangentes font un angle constant donné γ avec l'axe Oz :

1° *Trouver l'équation différentielle des projections de ces courbes sur le plan xOy, et montrer que l'intégration de cette équation se ramène à une quadrature;*

2° *Effectuer la quadrature et construire la projection dans le cas particulier où m est égal à l'unité.*

Les coordonnées d'un point quelconque d'une des courbes considérées étant x, y, z, on doit avoir en chaque point de ces courbes

$$dz = \cos\gamma\, ds,$$

ds étant la différentielle de l'arc, de sorte que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

D'ailleurs, la valeur de dz étant la même pour un point quelconque de la courbe et pour le point correspondant de la surface, on peut éliminer ds et dz entre les deux

équations précédentes et la suivante,

$$dz = \frac{mx\,dx + y\,dy}{a},$$

obtenue en différentiant l'équation de la surface; on trouve ainsi

$$mx\,dx + y\,dy = n\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$n = a\cot\gamma.$$

L'équation obtenue, qui ne contient que x, y et leurs différentielles, est l'équation différentielle des projections des courbes considérées sur le plan xOy. On peut la résoudre par rapport à y et, en posant

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

mettre cette équation sous la forme

$$(1) \qquad y = n\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} - m\frac{x}{p}.$$

Cette équation différentielle, linéaire par rapport aux variables x et y, peut s'intégrer; en effet, si l'on différentie, on trouve

$$(2) \qquad \frac{dx}{dp} - \frac{m}{p(p^2+m)}x + \frac{n}{p(p^2+m)\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

L'équation (2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre; son intégrale est de la forme

$$(3) \qquad x = e^{\int_{p_0}^{p}\frac{m\,dp}{p(p^2+m)}}\left[C - \int_{p_0}^{p} e^{-\int_{p_0}^{p}\frac{m\,dp}{p(p^2+m)}}\frac{n}{p(p^2+m)\sqrt{1+p^2}}\,dp\right].$$

On obtiendra l'intégrale de l'équation (1) en élimi-

nant p entre les équations (1) et (3). La question se ramène donc bien à une seule quadrature, car on obtient sans difficulté $\int_{p_0}^{p} \frac{m\,dp}{p(p^2+m)}$.

Dans le cas particulier où $m = 1$, on a à considérer l'équation différentielle

$$(4) \qquad x\,dx + y\,dy = n\,ds,$$

ds représentant cette fois la différentielle de l'arc de la projection sur le plan xOy des courbes considérées, de sorte que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

En intégrant l'équation (4), ce qui donne

$$x^2 + y^2 = 2ns + \text{const.},$$

puis, passant aux coordonnées polaires r et θ, on a

$$r^2 = 2ns + \text{const.},$$

et, en différentiant,

$$r\,dr = n\,ds = n\sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}.$$

Les variables se séparent aisément, et l'on a à intégrer l'équation

$$n\,d\theta = \frac{\sqrt{r^2 - n^2}}{r}\,dr = \left[\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - n^2}} - n^2 \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - n^2}}\right].$$

Si l'on remarque que

$$\frac{n\,dr}{r\sqrt{r^2 - n^2}} = -\frac{d\frac{n}{r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{r}\right)^2}} = d\arccos\frac{n}{r},$$

on obtient

$$(5) \qquad \theta = \frac{1}{n}\sqrt{r^2 - n^2} - \arccos\frac{n}{r}.$$

La construction de la courbe représentée par l'équation (5) se fait facilement, puisque cette courbe est la *développante du cercle* de rayon $n = a \cot\gamma$.

SUR UN THÉORÈME D'EULER CONCERNANT LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN QUATRE CUBES POSITIFS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Euler a démontré qu'un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est égal à la somme de quatre cubes positifs, entiers ou fractionnaires. On trouve la formule correspondante dans une Note qui termine les *Exercices d'analyse numérique* de Lebesgue. Nous ferons d'abord observer que Lebesgue ne paraît pas avoir deviné la méthode qui a dû servir à Euler pour obtenir cette formule. En effet, il nous paraît évident que celle-ci provient des recherches entreprises par Euler pour la résolution de l'équation indéterminée

$$x^3 + y^3 = Az^3. \tag{1}$$

L'identité d'Euler est la suivante,

$$n = \left(\frac{n}{6m^2}\right)^3 [(2 - a)^3 + a^3(b - 1)^3 + b^3(c - 1)^3 + c^3],$$

dans laquelle on suppose m tel que l'on ait

$$\frac{n}{12} < m^3 < \frac{n}{6},$$

et, de plus,

$$a = 1 + \frac{6m^3}{n}, \quad b = \frac{2a^3 - 1}{a^3 + 1}, \quad c = \frac{2b^3 - 1}{b^3 + 1}.$$

Il est fort probable que cette identité provient de l'A-

rithmétique et non de l'Algèbre, contrairement à la supposition de Lebesgue. En partant des formules qui peuvent servir à la résolution de l'équation (1), on obtient le théorème suivant, dont la première partie complète le théorème d'Euler :

THÉORÈME. — *Un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs.*

En d'autres termes, on peut résoudre d'une infinité de manières, et en nombres rationnels, les deux équations

$$N = (x^3 + y^3) \times (z^3 + u^3), \tag{2}$$

et

$$N = (x^3 + y^3) : (z^3 + u^3), \tag{3}$$

N désignant un nombre quelconque.

Parmi les formules en nombre infini qui permettent de résoudre les équations (2) et (3), nous donnerons les deux suivantes, qui fournissent elles-mêmes des solutions en nombre infini.

Pour l'équation (3), on pose $N = 2^\lambda 3^\mu \frac{A}{B}$; on choisit $\frac{a}{b}$ par les conditions d'inégalité

$$\frac{B}{2^\lambda 3^{\mu-2} A} > \frac{a^3}{b^3} > \frac{B}{2^\lambda 3^{\mu-1} A},$$

et l'on a

$$x = \frac{Bb^3}{a}, \quad y = \frac{2^\lambda 3^{\mu-1} A a^3 - Bb^3}{a},$$

$$z = \frac{Bb^3 - 2^\lambda 3^{\mu-2} A a^3}{b}, \quad u = \frac{2^\lambda 3^{\mu-2} A a^3}{b}.$$

Pour l'équation (2), qui correspond au théorème

d'Euler, nous remarquerons que l'on a les deux identités

$$(6LM + L^2 - 3M^2)^3 + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 = 2^2.3^2LM(L^2 + 3M^2)^2,$$
$$(L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L(L^2 + 3M^2).$$

Donc, en multipliant membre à membre, et divisant les deux membres de l'égalité obtenue par $(L^2 + 3M^2)^3$, on aura décomposé $2^3.3^2L^2M$ en un produit de deux facteurs égaux à une somme de deux cubes; en supposant, de plus,

$$L = Bb^3, \quad M = 2^{\lambda-3}3^{\mu-2}Aa^3,$$

on aura ainsi décomposé en ce produit le nombre

$$N = 2^{\lambda}.3^{\mu}AB^2;$$

on déterminera d'ailleurs le nombre $\frac{a^3}{b^3}$ de telle sorte qu'il rende positifs tous les cubes considérés.

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

Par M. A. MACÉ DE LÉPINAY,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

Par deux points donnés sur une ellipse, on fait passer une circonférence quelconque, puis on mène à ces deux courbes les tangentes communes : lieu du point de rencontre de ces tangentes.

On sait que, si $S = 0$ est l'équation d'une conique, $P = 0$ l'équation d'une droite, $S + \lambda P^2 = 0$ est l'équation générale des coniques bitangentes à la conique $S = 0$, $P = 0$ étant la corde des contacts. On sait, d'autre part, que, si deux coniques sont bitangentes à une troi-

sième, deux des sécantes communes à ces deux coniques passent par le point de rencontre des deux cordes de contact.

Cela posé, rapportons l'ellipse à son centre et à ses axes; son équation sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soit

$$y = mx + n$$

l'équation de la droite qui, par son intersection avec l'ellipse, détermine les deux points donnés, et soient α, β les coordonnées du point de concours de deux tangentes communes à l'ellipse et à l'un des cercles passant par les deux points donnés.

L'équation de l'ensemble de ces deux tangentes communes sera

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2x^2 - a^2b^2) \\ &\qquad - (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

La corde des contacts du cercle et du système des deux tangentes, devant passer par l'intersection de la corde des contacts $a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 = 0$ et de la droite $y = mx + n$, sera représentée par l'équation

$$(2)\qquad a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 + \lambda(y - mx - n) = 0.$$

Dès lors, l'équation

$$\begin{aligned} &(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) \\ &\quad - (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)^2 \\ &\quad + \mu[a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 + \lambda(y - mx - n)]^2 = 0 \end{aligned}$$

représente une conique bitangente au système des deux tangentes communes considéré. Si l'on veut que cette courbe passe par les points donnés sur l'ellipse, il faut que cette équation soit satisfaite si l'on pose en même temps

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,\qquad y - mx - n = 0.$$

Donc $\mu = 1$, et l'équation devient, en développant,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) + 2\lambda(y - mx - n) \\ &\qquad \times (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2) + \lambda^2(y - mx - n)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous écrivons que cette équation représente un cercle et si, entre les deux équations de condition, nous éliminons λ, nous aurons le lieu cherché. Les conditions sont, en supprimant la solution $\lambda = 0$ qui ne convient pas, et posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &m\lambda = b^2\alpha - ma^2\beta, \\ &c^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) \\ &\quad + 2\lambda(a^2\beta + mb^2\alpha) + (1 - m^2)\lambda^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Éliminant λ, on trouve, en réduisant,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &m^2c^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) \\ &\quad + (1 + m^2)(b^4\alpha^2 - m^2a^4\beta^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

ou encore

$$(6)\quad (m^2a^2 + b^2)(b^2\alpha^2 - m^2a^2\beta^2) - m^2a^2b^2c^2 = 0.$$

Sous la forme (5), on voit que le lieu est une conique passant par l'intersection de l'ellipse donnée et des deux droites $b^2x - ma^2y = 0$, $b^2x + ma^2y = 0$, dont la première est le diamètre conjugué à la direction de la corde donnée.

Sous la forme (6), on voit que le lieu est une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée; de plus, l'équation (6) étant indépendante de n et ne renfermant m qu'au deuxième degré, on voit que le lieu est le même pour toutes les cordes parallèles à la direction donnée et à la direction symétrique par rapport à l'axe des x. En

particulier, on voit que, si la corde devient tangente à l'ellipse, le lieu représenté par l'équation (6) est le lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse donnée et aux cercles tangents à cette ellipse en un point donné.

Si la conique donnée est une hyperbole, le lieu correspondant est l'ellipse

$$(m^2a^2 - b^2)(b^2x^2 + m^2a^2y^2) - m^2a^2b^2c^2 = 0,$$

réelle si $m^2a^2 - b^2 > 0$, imaginaire si $m^2a^2 - b^2 < 0$.

La même méthode s'applique au cas de la parabole.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Haton de la Goupillière.

Vous avez bien voulu donner l'hospitalité des *Nouvelles Annales* (2e série, t. XIII, p. 534) à un court résumé des propriétés de la courbe remarquable qui est représentée par l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}},$$

et qui n'est autre que l'épicycloïde à quatre rebroussements. Je pense que le supplément suivant pourrait servir à compléter cette première insertion.

D'Alembert a étudié cette courbe, dans la rectification de laquelle il a cru trouver un paradoxe de Calcul intégral (*Mémoires de Berlin*, 1747). Il y est encore revenu dans ses *Opuscules* (vol. IV, Mémoire XXIII).

Lord Brougham a éclairci les difficultés soulevées par d'Alembert (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLIV, p. 1134). En même temps il en a

signalé d'autres auxquelles donne lieu cette même ligne, et qui sont relatives à la Dynamique (*ibid.*, p. 1184).

Il a rencontré incidemment une propriété donnée également par M. Chasles et qui consiste en ce que, quand on décrit l'épicycloïde comme l'enveloppe d'une droite de longueur constante mobile entre les côtés d'un angle droit, si la vitesse d'une des extrémités de la droite varie en raison inverse de sa distance au sommet de l'angle fixe, le point de contact de l'enveloppe avec la droite mobile décrit uniformément celle-ci.

M. Van den Broek est revenu sur ce mode de génération en le considérant comme un cas particulier du problème plus général qui concerne un angle quelconque (*Nouvelle Correspondance mathématique de Catalan*, t. I, p. 91).

M. Barbarin a montré que l'épicycloïde à quatre branches est le lieu géométrique des sommets des paraboles dont les foyers appartiennent à une circonférence et qui sont en même temps tangentes à deux diamètres fixes de ce cercle (*Nouvelles Annales*, 2e série, 1875, t. XIV, p. 328). Quelques autres propriétés énoncées par M. Barbarin dans le même article se trouvaient déjà dans ma Notice, dont il ne paraît pas avoir eu connaissance. Lui-même n'avait sans doute pas été lu par M. E. Lucas, qui a donné, en 1876, l'énoncé précédent comme théorème à démontrer dans la *Nouvelle Correspondance mathématique de Catalan* (t. II, p. 401). La démonstration a été insérée dans le même recueil l'année suivante par M. Schoentjes (*ibid.*, t. III, p. 58).

M. Lambiotte a fait connaître (*ibid.*, t. III, p. 63) l'équation

$$r = \frac{l}{\sqrt{2}} \cos 2\theta,$$

de la route suivie par le sommet d'un angle droit qui se

meut en s'appuyant sur l'épicycloïde à quatre rebroussements.

M. Gambey a proposé (*Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. XVII, p. 287) la recherche du lieu géométrique du point de la tangente de l'épicycloïde à quatre rebroussements qui est conjugué harmonique du point de contact par rapport aux axes de coordonnées, et M. Lez a donné (*ibid.*, t. XVIII, p. 322) l'équation de ce lieu sous la forme

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^2=l^2.$$

M. Todhunter a proposé (*Nouvelle Correspondance mathématique de Catalan*, t. III, p. 400) la recherche de l'enveloppe de la base d'une cycloïde qui roule sur une droite, et M. Mennesson (*ibid.*, t. IV, p. 362) a montré que cette courbe est une développante de l'épicycloïde à quatre rebroussements à laquelle on donnerait pour paramètre le double du diamètre du cercle générateur.

M. Amstein a pris cette épicycloïde, qu'il appelle *astroïde* (*Société vaudoise des Sciences naturelles*, t. XV, p. 175), comme exemple de sa méthode de *représentation conforme*, en cherchant la représentation conforme de l'astroïde dans l'intérieur du cercle qui passe par ses rebroussements.

Il ne sera pas sans intérêt de faire remarquer enfin que, dans la courbe qui nous occupe, la relation de l'abscisse à l'ordonnée étant précisément celle des courbures de la parabole aux deux extrémités d'une corde focale,

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{\rho'}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}},$$

cette épicycloïde peut être considérée comme la courbe représentative de la relation en question.

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES D'UNE ÉQUATION ET SUR LA SÉPARATION DES RACINES;

PAR M. LAGUERRE.

[SUITE (1).]

---

8. J'ajouterai encore, pour éclaircir ce qui précède, une seconde application.

Soit l'équation

$$f(x) = x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0,$$

qui a été considérée par M. J. Petersen dans sa *Théorie des équations algébriques* (2).

En substituant successivement 0 et + 1 dans le polynôme $f(x)$ et dans ses dérivées, on déduit du théorème de Budan que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre les limites considérées ou qu'elle en a deux, et l'on peut trancher la difficulté en substituant, comme le fait M. Petersen, un nombre intermédiaire et en mettant en usage une règle due à Fourier.

Appliquons la méthode exposée ci-dessus et effectuons la division du polynôme

$$x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5$$

par $x^2 - x$; on trouve aisément

$$\begin{aligned} x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 \\ = (x^3 - 4x^2 - 20x - 8)(x^2 - x) - 17x - 5, \end{aligned}$$

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 49.
(2) *Theorie der algebraischen Gleichungen*, p. 201.

d'où

$$\frac{x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5}{x^2 - x}$$
$$= x^3 - 4x^2 - 20x - 8 - \frac{17x + 5}{x^2 - x}$$
$$= x^3 - 4x^2 - 20x - 8 - \frac{22}{x - 1} + \frac{5}{x};$$

ce qui donne, en développant $\frac{22}{x-1}$ suivant les puissances croissantes de x et en ne retenant du développement que les termes d'un degré inférieur à celui de x^4,

$$x^3 - 4x^2 - 20x - 8 + 22 + 22x + 22x^2 + 22x^3 + \frac{5}{x},$$

ou, en ordonnant,

$$23x^3 + 18x^2 + 2x + 14 + \frac{5}{x}.$$

Cette suite ne présentant aucune variation, nous en conclurons que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre o et -1; c'est le résultat auquel conduit l'application de la règle de Fourier.

IV.

9. Il y aura souvent lieu de faire simultanément usage du théorème de Budan et du procédé de la division. Il est facile du reste d'imaginer des cas très étendus où ce procédé est plus avantageux que l'emploi du théorème de Budan.

Pour en donner un exemple, j'énoncerai d'abord, sous la forme suivante, la proposition que j'ai démontrée plus haut :

En désignant par a et b deux nombres positifs, soit

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$



la partie entière du quotient du polynôme $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, et considérons la suite

$$(5)\quad \begin{cases} f(a),\ f(b)-b(b-a)C_0, \\ f(b)-b^2(b-a)C_1,\ \ldots, \\ f(b)-b^{m-1}(b-a)C_{m-2},\ f(b); \end{cases}$$

le nombre des racines de l'équation

$$f(x)=0$$

qui sont comprises entre a et b est au plus égal au nombre des variations des termes de cette suite, et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

10. Cela posé, proposons-nous le problème suivant :

Étant donné un polynôme entier $f(x)$, déterminer deux limites, entre lesquelles demeure comprise la valeur de ce polynôme, lorsque x prend toutes les valeurs comprises entre les deux nombres positifs a et b.

Il est clair que ce problème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Trouver deux nombres α et β tels que, pour toutes les valeurs de λ inférieures à α et pour toutes les valeurs de cette variable supérieures à β, l'équation

$$f(x)-\lambda=0$$

n'ait pas de racine réelle comprise entre a et b.

L'emploi du théorème de Budan ne peut, en général, être d'aucun secours pour la détermination de ces nombres, car, si l'on considère les deux suites

$$f(a)-\lambda,\quad f'(a),\quad f''(a),\quad \ldots$$

et

$$f(b)-\lambda,\quad f'(b),\quad f''(b),\quad \ldots,$$

on voit que, quand l'ensemble des termes $f'(a), f''(a), \ldots$ et l'ensemble des termes $f'(b)$, $f''(b)$, ... ne présentent pas le même nombre de variations, il est impossible de déterminer λ de telle sorte que les deux suites précédentes offrent le même nombre de variations : ce qui serait nécessaire pour pouvoir conclure du théorème de Budan que l'équation $f(x) - \lambda = 0$ n'a aucune racine réelle comprise dans l'intervalle considéré.

J'emploierai ici la méthode de la division, et, en désignant comme ci-dessus par

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, je remarque d'abord que ce polynôme est aussi la partie entière du quotient de $f(x) - \lambda$ par $(x-a)(x-b)$.

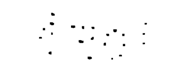
La suite que nous avons à considérer devient ainsi

$$(6)\quad \begin{cases} f(a) - \lambda,\ f(b) - \lambda - b(b-a)C_0, \\ f(b) - \lambda - b^2(b-a)C_1,\ \ldots, \\ f(b) - \lambda - b^{m-1}(b-a)C_{m-2},\ f(b) - \lambda. \end{cases}$$

Désignons respectivement par α et par β le plus petit et le plus grand des termes de la suite (5); si l'on donne à λ une valeur quelconque inférieure à α, tous les termes de la suite (6) sont négatifs, d'où il résulte que l'équation $f(x) - \lambda = 0$ n'a aucune racine réelle comprise entre a et b lorsque λ est plus petit que α. On prouverait de même que cette équation n'a aucune racine réelle comprise entre ces limites lorsque λ est plus grand que β.

D'où la proposition suivante :

La valeur que prend le polynôme $f(x)$, quand x varie depuis a jusqu'à b, demeure toujours comprise entre les nombres α et β.



V.

11. J'ai démontré précédemment qu'étant donnée une équation

$$f(x) = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots = 0,$$

où les termes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, si l'on forme les polynômes

$$\Phi_0(x) = A_0 x^m,$$
$$\Phi_1(x) = A_0 x^m + Bx^n,$$
$$\Phi_2(x) = A_0 x^m + Bx^n + Cx^p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont supérieures au nombre positif a est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\Phi_0(a),\ \Phi_1(a),\ \Phi_2(a),\ \ldots.$$

La démonstration supposait évidemment que les exposants m, n, p, ... étaient des nombres entiers et positifs; mais il est facile de voir que cette restriction est inutile.

En premier lieu, si quelques-uns étaient négatifs, en multipliant $f(x)$ par une puissance de x convenablement choisie (ce qui n'altérerait pas le nombre des racines positives de l'équation), on pourrait rendre tous ces exposants positifs.

En second lieu, si quelques-uns des nombres m, n, p, ... étaient fractionnaires, on arriverait au même résultat en changeant x en x^ω, ω étant le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres m, n, p, ... Par un raisonnement connu, on en déduit que la proposition subsiste encore lorsque les exposants sont incommensurables.

Rien n'empêche même de supposer que le nombre des termes de la fonction $f(x)$ soit illimité, pourvu que la série composée de ces termes soit convergente pour $x = a$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots,$$

où le second membre est une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et convergente pour $x = a$, le nombre des racines positives de l'équation

$$f(x) = 0,$$

qui sont supérieures au nombre positif a, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\Phi_0(a),\ \Phi_1(a),\ \Phi_2(a),\ \ldots,$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Le nombre de ces variations sera du reste évidemment fini, si la série tend, pour $x = a$, vers une limite différente de zéro, puisque pour une valeur suffisamment grande de n les termes

$$\Phi_n(a),\ \Phi_{n+1}(a),\ \Phi_{n+2}(a),\ \ldots$$

doivent avoir le même signe que $f(a)$.

12. Semblablement, étant donnée une équation

$$f(x) = A + Bx^m + Cx^n + Dx^p + \ldots,$$

où le second membre est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x (les exposants m, n, p, ... pouvant être d'ailleurs entiers, fractionnaires ou irrationnels) et convergente pour une valeur positive de x

égal à a; formons la suite des polynômes

$$\Phi_0(x)=\mathrm{A},\quad \Phi_1(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}x^m,\quad \Phi_2(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}x^m+\mathrm{C}x^n,\ldots$$

Cela posé, *le nombre des racines positives de l'équation $f(x)=0$ qui sont inférieures à a est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite*

$$\Phi_0(a),\ \Phi_1(a),\ \Phi_2(a),\ \ldots,$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

VI.

13. Je donnerai encore, en terminant, une application de la règle des signes de Descartes aux équations que l'on obtient en égalant à zéro les dénominateurs des réduites de la fonction e^x.

On appelle, comme on le sait, réduite de rang n de la fonction e^x une fraction

$$\frac{\Phi(x)}{\mathrm{F}(x)}$$

dont les deux termes sont des polynômes de degré n tels que le développement de cette fraction suivant les puissances croissantes de x coïncide, jusqu'au terme du degré $2n$ inclusivement, avec le développement de e^x ([1]); on peut poser, par conséquent,

$$\mathrm{F}(x)e^x=\Phi(x)+\mathrm{R},$$

R désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de x^{2n+1}.

([1]) Sur ces réduites, *voir* notamment le Mémoire de M. Hermite *Sur la fonction exponentielle*, p. 4.

On a d'ailleurs

$$F(x) = x^n - n(n+1)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)x^{n-2} - \ldots,$$

en sorte que le polynôme $F(x)$ ne présente que des variations; par suite, l'équation

$$F(x) = 0$$

ne peut avoir que des racines positives.

Le polynôme $\Phi(x)$, étant égal à $F(-x)$, ne présente que des permanences. J'observe maintenant que la série R satisfait à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x + 2n)\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

Cette série est de la forme

$$\Sigma A_m x^m,$$

où m doit prendre toutes les valeurs entières depuis $2n+1$ jusqu'à l'infini. En substituant cette expression dans l'équation différentielle, on voit aisément que l'on a identiquement

$$\Sigma m(m-1)A_m x^{m-1} - \Sigma m A_m(x^m + 2nx^{m-1}) + n\Sigma A_m x^m = 0,$$

d'où la relation suivante :

$$A_{m+1} = \frac{m-n}{(m-2n)(m+1)} A_m.$$

La fraction

$$\frac{m-n}{(m-2n)(m+1)}$$

étant positive pour toutes les valeurs de m supérieures à $2n$, on en conclut que tous les termes de la série R ont le même signe.

Par suite, le polynôme $\Phi(x)$ et la série R n'ayant que

des permanences, on voit que le développement de $e^x F(x)$ présente au plus une seule variation ; l'équation

$$e^x F(x) = 0,$$

qui a les mêmes racines que l'équation $F(x) = 0$ et dont le développement est d'ailleurs convergent pour toutes les valeurs de la variable, a donc, en vertu de la règle des signes de Descartes, une racine positive au plus ; l'équation $F(x) = 0$ ne peut avoir du reste que des racines positives.

D'où la conclusion suivante :

Si le nombre n est pair, l'équation $F(x) = 0$ *a toutes ses racines imaginaires.*

Si ce nombre est impair, elle a une seule racine réelle.

NOTE SUR LA SÉRIE DE TAYLOR ;

PAR M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

M. Jules Kœnig a déduit des propriétés élémentaires des séries une démonstration nouvelle de la formule de Taylor [1]. On peut, en partant du même principe, donner une démonstration encore plus simple.

On sait que pour tout polynôme de degré m, $f(x)$, on a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(x).$$

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1874.

Cette formule remarquable conduit tout naturellement à étudier la série suivante

$$(1)\qquad f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots,$$

dans laquelle $f(x)$ est une fonction quelconque.

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de h et pour toutes les valeurs de x qui ne rendent infinie aucune des quantités $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ...

Cette convergence se déduit *a fortiori* de la convergence de la série suivante

$$M+\frac{h'}{1}M+\frac{h'^2}{1.2}M+\frac{h'^3}{1.2.3}M+\ldots,$$

dans laquelle h' représente la valeur absolue de h et M la plus grande valeur absolue des quantités $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ...

La série convergente (1) est une fonction de x et de h, et il est visible que cette fonction a même dérivée par rapport à x et par rapport à h. Or toute fonction $\lambda(x,h)$ qui a cette propriété est de la forme $\psi(x+h)$.

En effet, soit

$$x+h=u;$$

on a alors

$$\lambda(x,h)=\lambda(x,u-x)=\psi(x,u)=\psi(x,x+h).$$

Exprimant alors que $\psi(x,x+h)$ a la même dérivée par rapport à x que par rapport à h, on a

$$\psi'_x(x,x+h)+\psi'_{x+h}(x,x+h)=\psi'_{x+h}(x,x+h)$$

ou, en réduisant,

$$\psi'_x(x,x+h)=0.$$

Donc la fonction ψ ne contient x que par la somme $x+h$.

On a ainsi pour faire la somme de la série (1) la for-

mule

$$\psi(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$

Cette égalité ayant lieu pour $h=0$ et pour toute valeur de x, on voit que la forme ψ n'est autre que la forme f, d'où la formule de Taylor

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$

Nous ferons remarquer en premier lieu que la démonstration précédente s'étend au cas où h et x ont des valeurs imaginaires. Seulement, dans ce cas, h' représente le module de h et M le plus grand module des quantités $f(x), f'(x), f''(x), \ldots.$

En outre, cette démonstration, comme celle de M. Kœnig, offre cet avantage qu'elle permet de développer les fonctions en série en évitant la fastidieuse discussion *du reste*.

Néanmoins, comme la forme *du reste* est utile dans certaines questions, notamment dans l'étude de la résolution numérique des équations par la méthode de Newton, il importe de compléter ces démonstrations et toutes celles qui leur seraient analogues.

A cet effet, désignons par A une quantité quelconque et par $\varphi(h)$ une fonction arbitraire de h, assujettie à cette condition que $\varphi(0)=0$.

On a évidemment

$$\left\{\begin{aligned} f(x+h)=f(x)&+\frac{h}{1}f'(x)+\ldots\\ &+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)+\mathrm{A}\varphi(h)\\ &+\left[-\mathrm{A}\varphi(h)+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n+1}f^{(n+1)}(x)+\ldots\right].\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Déterminons A de façon que la seconde partie du second membre soit nulle, c'est-à-dire par l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} o = &- A\varphi(h) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x) \\ &+ \frac{h^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}f^{(n+2)}(x) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Si, dans le second membre de cette équation, on remplace x par z et h par $x+h-z$, ce second membre, sans cesser d'être une série convergente, devient une fonction de z que nous désignerons par $F(z)$. On a donc

$$\begin{aligned} F(z) = - A\varphi(x+h-z) &+ \frac{(x+h-z)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(z) \\ &+ \frac{(x+h-z)^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}f^{(n+2)}(z) + \ldots. \end{aligned}$$

Il est maintenant visible que $F(x) = o$, d'après l'équation (3), qui définit A ; et aussi que $F(x+h) = o$, puisqu'on suppose $\varphi(o) = o$. Donc, quand z varie de x à $x+h$, la fonction $F(z)$ ne peut être ni toujours croissante ni toujours décroissante : donc la fonction $F'(z)$ ne peut être, entre ces limites, ni toujours positive ni toujours négative. Cette dérivée est très simple :

$$(4)\quad F'(z) = A\varphi'(x+h-z) - \frac{(x+h-z)^n}{1.2\ldots n}f^{n+1}(z).$$

Supposons que les fonctions $\varphi'(x+h-z)$ et $f^{(n+1)}(z)$ soient continues quand z varie de x à $x+h$. Alors la fonction $F'(z)$ est aussi continue entre ces limites, et, comme elle n'y garde pas le même signe, elle doit s'annuler pour

$$z = x + \theta h \quad (o < \theta < 1).$$

Écrivant que la valeur (4) de $F'(z)$ s'annule pour

cette valeur particulière de z, on obtient

$$o = A\varphi'[h(1-\theta)] - \frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

ce qui donne une valeur de A sous forme finie, mais avec une quantité θ dont on ne connaît que les limites.

La formule (2) devient alors, en y portant cette valeur de A et en remarquant que la seconde partie du second membre est nulle,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{\varphi(h)}{\varphi'[h(1-\theta)]} \frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Cette forme du reste est très générale, puisqu'elle contient une fonction arbitraire $\varphi(y)$ qui n'est assujettie qu'à deux conditions, savoir : que $\varphi(o)$ soit nulle et que $\varphi'(y)$ reste continue quand y varie entre o et h. Cette forme n'est point nouvelle; M. Bourget l'a obtenue par un calcul différent de celui qui précède ([1]).

La fonction $\varphi(h) = h^i$ satisfait aux conditions prescrites, pourvu que i soit un entier supérieur à o. On obtient ainsi la forme classique du reste

$$f(x+h) = f(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{1}{i} \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n} (1-\theta)^{n-i+1} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Enfin, pour $i = 1$ on a la forme de Cauchy et pour $i = n+1$ on a la forme de Lagrange.

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*. 1870.

terminons A de façon que la seconde partie du nd membre soit nulle, c'est-à-dire par l'équation

$$\left\{\begin{aligned} 0 = &- A\varphi(h) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x) \\ &+ \frac{h^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} f^{(n+2)}(x) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Si, dans le second membre de cette équation, on remplace x par z et h par $x+h-z$, ce second membre, sans cesser d'être une série convergente, devient une fonction de z que nous désignerons par $F(z)$. On a donc

$$\begin{aligned} F(z) = - A\varphi(x+h-z) &+ \frac{(x+h-z)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(z) \\ &+ \frac{(x+h-z)^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} f^{(n+2)}(z) + \ldots \end{aligned}$$

Il est maintenant visible que $F(x)=0$, d'après l'équation (3), qui définit A ; et aussi que $F(x+h)=0$, puisqu'on suppose $\varphi(0)=0$. Donc, quand z varie de x à $x+h$, la fonction $F(z)$ ne peut être ni toujours croissante ni toujours décroissante : donc la fonction $F'(z)$ ne peut être, entre ces limites, ni toujours positive ni toujours négative. Cette dérivée est très simple :

$$(4) \qquad F'(z) = A\varphi'(x+h-z) - \frac{(x+h-z)^n}{1.2\ldots n} f^{n+1}(z).$$

Supposons que les fonctions $\varphi'(x+h-z)$ et $f^{(n+1)}(z)$ soient continues quand z varie de x à $x+h$. Alors la fonction $F'(z)$ est aussi continue entre ces limites, et, comme elle n'y garde pas le même signe, elle doit s'annuler pour

$$z = x + \theta h \quad (0 < \theta < 1).$$

Écrivant que la valeur (4) de $F'(z)$ s'annule p

de degré $m-1$ en x les $m-p$ suivantes,

$$
\begin{aligned}
x^{m-p-1}\varphi(x) &= 0,\\
x^{m-p-2}\varphi(x) &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots &,\\
x\varphi(x) &= 0,\\
\varphi(x) &= 0,
\end{aligned}
$$

et l'on égale à zéro le déterminant du système de ces m équations considérées comme linéaires en x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x, x^0.

Si l'on désigne, d'une manière générale, par f_μ et φ_μ les polynômes

$$
\begin{aligned}
f_\mu &= A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu,\\
\varphi_\mu &= B_0 x^{\mu+p-m} + B_1 x^{\mu+p-m-1} + \ldots + B_{\mu+p-m},
\end{aligned}
$$

l'équation (3) pourra s'écrire

$$\frac{f_{\mu-1}}{\varphi_{\mu-1}} = \frac{A_\mu x^{m-\mu} + \ldots + A_m}{B_{\mu+p-m} x^{m-\mu} + \ldots + B_p},$$

ou bien

$$\frac{f_{\mu-1}}{\varphi_{\mu-1}} = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

par suite

$$(4) \qquad f_{\mu-1}\varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x) = 0.$$

Soit $G_{\mu,\nu}$ le coefficient de $x^{m-\nu}$ dans cette équation ; on aura

$$
\begin{aligned}
f_{\mu-1}\varphi(x) - \varphi_{\mu-1}f(x) = G_{\mu,1}x^{m-1} &+ G_{\mu,2}x^{m-2} + \ldots\\
&+ G_{\mu,\nu}x^{m-\nu} + \ldots + G_{\mu,m}.
\end{aligned}
$$

Le déterminant de Cauchy sera donc

$$
\begin{vmatrix}
G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m-p+1,m}\\
G_{m-p+2,1} & G_{m-p+2,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m-p+2,m}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m,m}\\
B_0 & B_1 & \ldots & \ldots & B_p & 0 & 0\\
0 & B_0 & \ldots & \ldots & B_{p-1} & B_p & 0\\
0 & 0 & \ldots & B_0 & \ldots & \ldots & B_p
\end{vmatrix}.
$$

on voit que, quand l'ensemble des termes $f'(a), f''(a), \ldots$ et l'ensemble des termes $f'(b)$, $f''(b)$, ... ne présentent pas le même nombre de variations, il est impossible de déterminer λ de telle sorte que les deux suites précédentes offrent le même nombre de variations : ce qui serait nécessaire pour pouvoir conclure du théorème de Budan que l'équation $f(x) - \lambda = 0$ n'a aucune racine réelle comprise dans l'intervalle considéré.

J'emploierai ici la méthode de la division, et, en désignant comme ci-dessus par

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, je remarque d'abord que ce polynôme est aussi la partie entière du quotient de $f(x) - \lambda$ par $(x-a)(x-b)$.

La suite que nous avons à considérer devient ainsi

$$(6)\quad \begin{cases} f(a) - \lambda,\ f(b) - \lambda - b(b-a)C_0, \\ f(b) - \lambda - b^2(b-a)C_1,\ \ldots, \\ f(b) - \lambda - b^{m-1}(b-a)C_{m-2},\ f(b) - \lambda. \end{cases}$$

Désignons respectivement par α et par β le plus petit et le plus grand des termes de la suite (5) ; si l'on donne à λ une valeur quelconque inférieure à α, tous les termes de la suite (6) sont négatifs, d'où il résulte que l'équation $f(x) - \lambda = 0$ n'a aucune racine réelle comprise entre a et b lorsque λ est plus petit que α. On prouverait de même que cette équation n'a aucune racine réelle comprise entre ces limites lorsque λ est plus grand que β.

D'où la proposition suivante :

La valeur que prend le polynôme $f(x)$, quand x varie depuis a jusqu'à b, demeure toujours comprise entre les nombres α et β.



V.

11. J'ai démontré précédemment qu'étant donnée une équation

$$f(x) = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots = 0,$$

où les termes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, si l'on forme les polynômes

$$\Phi_0(x) = A_0 x^m,$$
$$\Phi_1(x) = A_0 x^m + Bx^n,$$
$$\Phi_2(x) = A_0 x^m + Bx^n + Cx^p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont supérieures au nombre positif a est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\Phi_0(a), \quad \Phi_1(a), \quad \Phi_2(a), \quad \ldots.$$

La démonstration supposait évidemment que les exposants m, n, p, ... étaient des nombres entiers et positifs; mais il est facile de voir que cette restriction est inutile.

En premier lieu, si quelques-uns étaient négatifs, en multipliant $f(x)$ par une puissance de x convenablement choisie (ce qui n'altérerait pas le nombre des racines positives de l'équation), on pourrait rendre tous ces exposants positifs.

En second lieu, si quelques-uns des nombres m, n, p, ... étaient fractionnaires, on arriverait au même résultat en changeant x en x^ω, ω étant le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres m, n, p, ... Par un raisonnement connu, on en déduit que la proposition subsiste encore lorsque les exposants sont incommensurables.

Rien n'empêche même de supposer que le nombre des termes de la fonction $f(x)$ soit illimité, pourvu que la série composée de ces termes soit convergente pour $x = a$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots,$$

où le second membre est une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et convergente pour $x = a$, le nombre des racines positives de l'équation

$$f(x) = 0,$$

qui sont supérieures au nombre positif a, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\Phi_0(a),\ \Phi_1(a),\ \Phi_2(a),\ \ldots,$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Le nombre de ces variations sera du reste évidemment fini, si la série tend, pour $x = a$, vers une limite différente de zéro, puisque pour une valeur suffisamment grande de n les termes

$$\Phi_n(a),\ \Phi_{n+1}(a),\ \Phi_{n+2}(a),\ \ldots$$

doivent avoir le même signe que $f(a)$.

12. Semblablement, étant donnée une équation

$$f(x) = A + Bx^m + Cx^n + Dx^p + \ldots,$$

où le second membre est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x (les exposants m, n, p, ... pouvant être d'ailleurs entiers, fractionnaires ou irrationnels) et convergente pour une valeur positive de x

égal à a; formons la suite des polynômes

$$\Phi_0(x) = \text{A}, \quad \Phi_1(x) = \text{A} + \text{B}x^m, \quad \Phi_2(x) = \text{A} + \text{B}x^m + \text{C}x^n, \ldots.$$

Cela posé, *le nombre des racines positives de l'équation* $f(x) = 0$ *qui sont inférieures à* a *est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite*

$$\Phi_0(a), \quad \Phi_1(a), \quad \Phi_2(a), \quad \ldots,$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

VI.

13. Je donnerai encore, en terminant, une application de la règle des signes de Descartes aux équations que l'on obtient en égalant à zéro les dénominateurs des réduites de la fonction e^x.

On appelle, comme on le sait, réduite de rang n de la fonction e^x une fraction

$$\frac{\Phi(x)}{\text{F}(x)}$$

dont les deux termes sont des polynômes de degré n tels que le développement de cette fraction suivant les puissances croissantes de x coïncide, jusqu'au terme du degré $2n$ inclusivement, avec le développement de e^x ([1]); on peut poser, par conséquent,

$$\text{F}(x)e^x = \Phi(x) + \text{R},$$

R désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de x^{2n+1}.

([1]) Sur ces réduites, *voir* notamment le Mémoire de M. Hermite *Sur la fonction exponentielle*, p. 4.

Je dois ajouter que, dans ce qui suit, j'admets comme connue la composition de deux forces concourantes, que je prends pour point de départ et que je fais immédiatement suivre du théorème que voici :

Théorème. — *Si l'on considère dans un plan deux forces appliquées en des points quelconques, et qu'on fasse tourner ces forces d'angles égaux et de même sens autour de leurs points d'application :*

1° *Le point de concours de leurs directions décrit une circonférence ;*

2° *La direction de la résultante passe par un point fixe de cette circonférence ;*

3° *Cette direction tourne du même angle que les composantes.*

La démonstration de ce théorème est assez simple pour que je n'aie pas besoin de la donner ici.

Remarque. — Il résulte de ce théorème que, si l'on prend constamment pour point d'application de la résultante un point de sa direction, fixe par rapport au point de concours des directions des composantes, *ce point d'application se mouvra sur un limaçon de Pascal.*

Centre de composition. — Comme nous pouvons prendre pour point d'application de la résultante des deux forces un point quelconque de sa direction, nous considérerons cette résultante comme constamment appliquée au point de sa direction qui reste fixe, lorsqu'on fait tourner les composantes d'angles égaux et de même sens. Nous appellerons ce point le *centre de composition* des deux forces.

Pour définir géométriquement la position de ce point, considérons dans un plan deux forces F et F' appliquées aux points A et A' et dont les directions se coupent en

des permanences, on voit que le développement de $e^x F(x)$ présente au plus une seule variation; l'équation

$$e^x F(x) = 0,$$

qui a les mêmes racines que l'équation $F(x) = 0$ et dont le développement est d'ailleurs convergent pour toutes les valeurs de la variable, a donc, en vertu de la règle des signes de Descartes, une racine positive au plus; l'équation $F(x) = 0$ ne peut avoir du reste que des racines positives.

D'où la conclusion suivante :

Si le nombre n est pair, l'équation $F(x) = 0$ *a toutes ses racines imaginaires.*

Si ce nombre est impair, elle a une seule racine réelle.

NOTE SUR LA SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. E. AMIGUES,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

M. Jules Kœnig a déduit des propriétés élémentaires des séries une démonstration nouvelle de la formule de Taylor [1]. On peut, en partant du même principe, donner une démonstration encore plus simple.

On sait que pour tout polynôme de degré m, $f(x)$, on a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(x).$$

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1874.

Cette formule remarquable conduit tout naturellement à étudier la série suivante

$$(1)\qquad f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots,$$

dans laquelle $f(x)$ est une fonction quelconque.

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de h et pour toutes les valeurs de x qui ne rendent infinie aucune des quantités $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$.

Cette convergence se déduit *a fortiori* de la convergence de la série suivante

$$M + \frac{h'}{1}M + \frac{h'^2}{1.2}M + \frac{h'^3}{1.2.3}M + \ldots,$$

dans laquelle h' représente la valeur absolue de h et M la plus grande valeur absolue des quantités $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$.

La série convergente (1) est une fonction de x et de h, et il est visible que cette fonction a même dérivée par rapport à x et par rapport à h. Or toute fonction $\lambda(x,h)$ qui a cette propriété est de la forme $\psi(x+h)$.

En effet, soit

$$x + h = u;$$

on a alors

$$\lambda(x,h) = \lambda(x, u - x) = \psi(x,u) = \psi(x, x+h).$$

Exprimant alors que $\psi(x, x+h)$ a la même dérivée par rapport à x que par rapport à h, on a

$$\psi'_x(x, x+h) + \psi'_{x+h}(x, x+h) = \psi'_{x+h}(x, x+h)$$

ou, en réduisant,

$$\psi'_x(x, x+h) = 0.$$

Donc la fonction ψ ne contient x que par la somme $x+h$.

On a ainsi pour faire la somme de la série (1) la for-

mule

$$\psi(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

Cette égalité ayant lieu pour $h=0$ et pour toute valeur de x, on voit que la forme ψ n'est autre que la forme f, d'où la formule de Taylor

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

Nous ferons remarquer en premier lieu que la démonstration précédente s'étend au cas où h et x ont des valeurs imaginaires. Seulement, dans ce cas, h' représente le module de h et M le plus grand module des quantités $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$

En outre, cette démonstration, comme celle de M. Kœnig, offre cet avantage qu'elle permet de développer les fonctions en série en évitant la fastidieuse discussion *du reste*.

Néanmoins, comme la forme *du reste* est utile dans certaines questions, notamment dans l'étude de la résolution numérique des équations par la méthode de Newton, il importe de compléter ces démonstrations et toutes celles qui leur seraient analogues.

A cet effet, désignons par A une quantité quelconque et par $\varphi(h)$ une fonction arbitraire de h, assujettie à cette condition que $\varphi(0)=0$.

On a évidemment

$$\left\{\begin{aligned} f(x+h)&=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\ldots\\ &+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)+A\varphi(h)\\ &+\left[-A\varphi(h)+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n+1}f^{(n+1)}(x)+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Déterminons A de façon que la seconde partie du second membre soit nulle, c'est-à-dire par l'équation

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = -A\varphi(h) &+ \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x) \\ &+ \frac{h^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}f^{(n+2)}(x) + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Si, dans le second membre de cette équation, on remplace x par z et h par $x+h-z$, ce second membre, sans cesser d'être une série convergente, devient une fonction de z que nous désignerons par $F(z)$. On a donc

$$\begin{aligned} F(z) = -A\varphi(x+h-z) &+ \frac{(x+h-z)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(z) \\ &+ \frac{(x+h-z)^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}f^{(n+2)}(z) + \ldots . \end{aligned}$$

Il est maintenant visible que $F(x) = 0$, d'après l'équation (3), qui définit A; et aussi que $F(x+h) = 0$, puisqu'on suppose $\varphi(0) = 0$. Donc, quand z varie de x à $x+h$, la fonction $F(z)$ ne peut être ni toujours croissante ni toujours décroissante : donc la fonction $F'(z)$ ne peut être, entre ces limites, ni toujours positive ni toujours négative. Cette dérivée est très simple :

$$(4)\quad F'(z) = A\varphi'(x+h-z) - \frac{(x+h-z)^n}{1.2\ldots n}f^{n+1}(z).$$

Supposons que les fonctions $\varphi'(x+h-z)$ et $f^{(n+1)}(z)$ soient continues quand z varie de x à $x+h$. Alors la fonction $F'(z)$ est aussi continue entre ces limites, et, comme elle n'y garde pas le même signe, elle doit s'annuler pour

$$z = x + \theta h \quad (0 < \theta < 1).$$

Écrivant que la valeur (4) de $F'(z)$ s'annule pour

cette valeur particulière de z, on obtient

$$0 = A\varphi'[h(1-\theta)] - \frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

ce qui donne une valeur de A sous forme finie, mais avec une quantité θ dont on ne connait que les limites.

La formule (2) devient alors, en y portant cette valeur de A et en remarquant que la seconde partie du second membre est nulle,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{\varphi(h)}{\varphi'[h(1-\theta)]} \frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Cette forme du reste est très générale, puisqu'elle contient une fonction arbitraire $\varphi(y)$ qui n'est assujettie qu'à deux conditions, savoir : que $\varphi(0)$ soit nulle et que $\varphi'(y)$ reste continue quand y varie entre 0 et h. Cette forme n'est point nouvelle; M. Bourget l'a obtenue par un calcul différent de celui qui précède ([1]).

La fonction $\varphi(h) = h^i$ satisfait aux conditions prescrites, pourvu que i soit un entier supérieur à 0. On obtient ainsi la forme classique du reste

$$f(x+h) = f(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{1}{i} \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n} (1-\theta)^{n-i+1} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Enfin, pour $i = 1$ on a la forme de Cauchy et pour $i = n+1$ on a la forme de Lagrange.

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1870.

SUR LA TRANSFORMATION DU DÉTERMINANT DE M. SYLVESTER EN CELUI DE CAUCHY;

PAR M. CH. BIEHLER.

Lorsqu'on a deux équations, l'une $f(x)=0$ de degré m, l'autre $\varphi(x)=0$ de degré p (nous supposerons $p<m$), savoir

$$(1)\qquad f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$

$$(2)\qquad \varphi(x)=B_0x^p+B_1x^{p-1}+\ldots+B_p=0,$$

on peut exprimer sous deux formes différentes la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations aient une racine commune.

L'une d'elles, due à M. Sylvester, s'obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro le déterminant d'ordre $m+p$ du système des $m+p$ équations

$$\begin{array}{ll} x^{p-1}f(x)=0, & x^{m-1}\varphi(x)=0,\\ x^{p-2}f(x)=0, & x^{m-2}\varphi(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots,\\ xf(x)=0, & x\varphi(x)=0,\\ f(x)=0, & \varphi(x)=0, \end{array}$$

considérées comme linéaires en x^{m+p-1}, x^{m+p-2}, ..., x, x^0.

La seconde a été donnée par Cauchy : elle s'obtient en égalant à zéro un déterminant d'ordre m que l'on forme comme il suit. On considère les p équations

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A_0x^{\mu-1}+A_1x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}}{B_0x^{\mu+p-m-1}+\ldots+B_{\mu+p-m-1}}\\[2ex] \qquad =\dfrac{A_\mu x^{m-\mu}+A_{\mu+1}x^{m-\mu-1}+\ldots+A_m}{B_{\mu+p-m}x^{m-\mu}+B_{\mu+p-m+1}x^{m-\mu-1}+\ldots+B_p}, \end{array} \right.$$

qu'on obtient en donnant à μ les p valeurs $m-p+1$, $m-p+2$, ..., $m-1$, m; on ajoute à ces p équations

de degré $m - 1$ en x les $m - p$ suivantes,

$$x^{m-p-1}\varphi(x) = 0,$$
$$x^{m-p-2}\varphi(x) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x\varphi(x) = 0,$$
$$\varphi(x) = 0,$$

et l'on égale à zéro le déterminant du système de ces m équations considérées comme linéaires en x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x, x^0.

Si l'on désigne, d'une manière générale, par f_μ et φ_μ les polynômes

$$f_\mu = A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu,$$
$$\varphi_\mu = B_0 x^{\mu+p-m} + B_1 x^{\mu+p-m-1} + \ldots + B_{\mu+p-m},$$

l'équation (3) pourra s'écrire

$$\frac{f_{\mu-1}}{\varphi_{\mu-1}} = \frac{A_\mu x^{m-\mu} + \ldots + A_m}{B_{\mu+p-m} x^{m-\mu} + \ldots + B_p},$$

ou bien

$$\frac{f_{\mu-1}}{\varphi_{\mu-1}} = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

par suite

(4) $$f_{\mu-1}\varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x) = 0.$$

Soit $G_{\mu,\nu}$ le coefficient de $x^{m-\nu}$ dans cette équation ; on aura

$$f_{\mu-1}\varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x) = G_{\mu,1} x^{m-1} + G_{\mu,2} x^{m-2} + \ldots + G_{\mu,\nu} x^{m-\nu} + \ldots + G_{\mu,m}.$$

Le déterminant de Cauchy sera donc

$$\begin{vmatrix} G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m-p+1,m} \\ G_{m-p+2,1} & G_{m-p+2,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m-p+2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m,m} \\ B_0 & B_1 & \ldots & \ldots & B_p & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & \ldots & \ldots & B_{p-1} & B_p & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & B_0 & \ldots & \ldots & B_p \end{vmatrix}.$$

Nous allons démontrer que ce déterminant est identique, à un facteur numérique près, à celui de M. Sylvester, savoir

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & A_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & \ldots & A_{m-1} & A_m & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & \ldots & \ldots & A_{m-1} & A_m & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_0 & A_1 & \cdot\cdot & \ldots & A_{m-1} & A_m \\ B_0 & B_1 & \cdot & B_p & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & \cdot & B_{p-1} & B_p & 0 & \cdot\cdot & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \ldots & \cdot\cdot & 0 & B_0 & \ldots & B_{p-1} & B_p \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant renferme les coefficients A dans ses p premières lignes et les coefficients B dans les m dernières.

Pour opérer la transformation de ce déterminant en celui de Cauchy, remplaçons les éléments de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de Δ, savoir

$$B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_p,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,$$

par les sommes que l'on obtient en ajoutant entre eux les éléments d'une même colonne de Δ, après avoir multiplié les éléments des lignes successives respectivement par

$$-B_0,\ -B_1,\ \ldots,\ -B_{p-1},\ A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{m-1};$$

les sommes obtenues sont évidemment les coefficients des diverses puissances de x dans la fonction

$$f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{m-1}f(x).$$

On sait que cette fonction n'est que de degré $m-1$ et que l'on a

$$f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{m-1}f(x) = G_{m,1}x^{m-1} + G_{m,2}x^{m-2} + \ldots + G_{m,m};$$

les éléments de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne deviennent donc, par cette transformation,

$$0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ G_{m,1},\ G_{m,2},\ \ldots,\ G_{m,m}.$$

La substitution de ces éléments à la place de ceux de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de Δ a eu pour effet de multiplier le déterminant Δ par A_0.

Laissant actuellement intacts les éléments de la première et de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne, multiplions ceux de la deuxième, troisième, ..., $p^{\text{ième}}$ respectivement par

$$-B_0,\ -B_1,\ \ldots,\ -B_{p-2},$$

ceux de la $(p+2)^{\text{ième}}$, $(p+3)^{\text{ième}}$, ..., $(p+m)^{\text{ième}}$ respectivement par

$$A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{m-2},$$

et remplaçons les éléments de la $(p+2)^{\text{ième}}$ ligne de Δ par les sommes qu'on obtient en ajoutant par colonnes les éléments ainsi modifiés; ces sommes sont les coefficients des diverses puissances de x dans la fonction

$$f_{m-2}\varphi(x) - \varphi_{m-2}f(x),$$

qui est égale à

$$G_{m-1,1}x^{m-1} + G_{m-1,2}x^{m-2} + \ldots + G_{m-1,m}.$$

Cette substitution a encore pour effet de multiplier Δ par A_0.

En laissant maintenant intacts les éléments des deux premières lignes et ceux de la $(p+1)^{\text{ième}}$ et de la $(p+2)^{\text{ième}}$, multiplions ceux des troisième, quatrième, cinquième, ..., $p^{\text{ième}}$ rangées respectivement par $-B_0$, $-B_1, \ldots, -B_{p-3}$, ceux des $(p+3)^{\text{ième}}$, ..., $(p+m)^{\text{ième}}$ par $+A_0, A_1, \ldots, A_{m-3}$, et ajoutons les éléments modifiés par colonnes; on obtient les éléments

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ G_{m-2,1},\ G_{m-2,2},\ \ldots,\ G_{m-2,m}.$$

Après p opérations analogues, les $(p+1)^{\text{ième}}$, $(p+2)^{\text{ième}}$, ..., $(2p)^{\text{ième}}$ rangées de Δ auront été remplacées par

$$\begin{array}{l}
0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ G_{m,1},\quad G_{m,2},\quad \ldots,\ G_{m,m},\\
0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ G_{m-1,1},\quad G_{m-1,2},\quad \ldots,\ G_{m-1,m},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ G_{m-p+1,1},\ G_{m-p+1,2},\ \ldots,\ G_{m-p+1,m}.
\end{array}$$

Les $m-p$ dernières rangées de Δ n'auront pas varié, et Δ aura été multiplié par A_0^p ; on aura donc

$$A_0^p\Delta = \left|\begin{array}{ccccccccccc}
A_0 & A_1 & \ldots & . & A_m & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0\\
0 & A_0 & \ldots & . & A_{m-1} & A_m & 0 & 0 & . & 0 & 0\\
. & . & \ldots & . & \ldots & .. & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & \ldots & A_0 & \ldots & .. & . & . & . & A_{m-1} & A_m\\
0 & 0 & \ldots & 0 & G_{m,1} & G_{m,2} & . & . & . & G_{m,m-1} & G_{m,m}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & . & . & . & G_{m-1,m-1} & G_{m-1,m}\\
. & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & . & . & . & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & 0 & G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & . & . & . & G_{m-p+1,m-1} & G_{m-p+1,m}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & B_0 & B_1 & . & B_p & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & B_0 & \ldots & B_p & \ldots & \ldots & 0\\
. & . & \ldots & . & . & .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & . & B_0 & \ldots & \ldots & B_p
\end{array}\right|.$$

Si l'on supprime de part et d'autre le facteur A_0^p, il viendra

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccccccc}
G_{m,1} & G_{m,2} & . & . & . & . & G_{m,m}\\
G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & . & . & . & . & G_{m-1,m}\\
\ldots & \ldots & . & . & . & . & \ldots\\
G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & . & . & . & . & G_{m-p+1,m}\\
B_0 & B_1 & . & B_p & 0 & . & 0\\
0 & B_0 & . & B_{p-1} & B_p & . & 0\\
. & .. & . & \ldots & .. & . & .\\
0 & 0 & B_0 & \ldots & .. & . & B_p
\end{array}\right|.$$

Le second membre est identique au déterminant de Cauchy, abstraction faite du facteur $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$.

Si donc on désigne par Δ_1 le déterminant de Cauchy, on aura

$$\Delta = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \Delta_1.$$

M. Ventéjol, dans un Mémoire sur l'élimination (15 février 1877), a donné une méthode pour opérer cette transformation. M. Ventéjol effectue la transformation sur un exemple particulier, ce qui ne montre peut-être pas assez la généralité de la proposition; il m'a paru intéressant de donner une démonstration générale, qui met mieux en évidence le principe de la méthode.

SUR LA COMPOSITION DES FORCES DANS LE PLAN;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève en Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.

Je me propose de développer dans cette Note une méthode nouvelle pour établir la composition des forces dans le plan.

Cette méthode a l'avantage d'être plus générale que la méthode ordinaire, en ce sens qu'elle rattache directement la composition des forces parallèles à celle des forces quelconques sans qu'il soit besoin de recourir à une démonstration spéciale. Elle met de plus en évidence l'existence d'un point remarquable jouant par rapport aux forces quelconques dans le plan le rôle que remplit le centre des forces parallèles par rapport à celles-ci.

Je dois ajouter que, dans ce qui suit, j'admets comme connue la composition de deux forces concourantes, que je prends pour point de départ et que je fais immédiatement suivre du théorème que voici :

Théorème. — *Si l'on considère dans un plan deux forces appliquées en des points quelconques, et qu'on fasse tourner ces forces d'angles égaux et de même sens autour de leurs points d'application :*

1° *Le point de concours de leurs directions décrit une circonférence ;*

2° *La direction de la résultante passe par un point fixe de cette circonférence ;*

3° *Cette direction tourne du même angle que les composantes.*

La démonstration de ce théorème est assez simple pour que je n'aie pas besoin de la donner ici.

Remarque. — Il résulte de ce théorème que, si l'on prend constamment pour point d'application de la résultante un point de sa direction, fixe par rapport au point de concours des directions des composantes, *ce point d'application se mouvra sur un limaçon de Pascal.*

Centre de composition. — Comme nous pouvons prendre pour point d'application de la résultante des deux forces un point quelconque de sa direction, nous considérerons cette résultante comme constamment appliquée au point de sa direction qui reste fixe, lorsqu'on fait tourner les composantes d'angles égaux et de même sens. Nous appellerons ce point le *centre de composition* des deux forces.

Pour définir géométriquement la position de ce point, considérons dans un plan deux forces F et F′ appliquées aux points A et A′ et dont les directions se coupent en

cident ; c'est ce point unique que nous appellerons *centre de composition des forces quelconques* considérées, et nous dirons :

Lorsqu'on fait tourner un nombre quelconque de forces situées dans un plan, d'angles égaux et de même sens autour de leurs points d'application, la résultante de ces forces tourne du même angle autour du centre de composition du système.

Composition des forces parallèles. — Considérons deux forces parallèles et de même sens F et F′ appliquées aux points A et A′. Composons ces forces en les considérant comme des forces quelconques. La direction de la résultante passant par le point de concours des directions des deux forces, qui, dans ce cas, est à l'infini, est parallèle à ces directions.

De plus, il résulte de la composition des forces quelconques qu'on a en grandeur la résultante de deux forces, en appliquant en un point quelconque des forces égales et parallèles aux proposées, et en les composant. Cette remarque, appliquée aux forces parallèles F et F′, montre que la grandeur de la résultante est égale à la somme des grandeurs des composantes.

Pour avoir maintenant le point d'application de cette résultante, cherchons le centre de composition de F et de F′. La circonférence circonscrite au triangle formé par les points d'application et le point de concours des directions se réduit, dans le cas considéré, à la droite AA′ et à la droite à l'infini du plan. Le centre cherché est donc sur AA′ et sa position sur cette droite est définie par la relation établie plus haut

$$\frac{\text{corde } A'C}{\text{corde } AC} = \frac{F}{F'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{F}{F'},$$

qui est bien la relation connue.

On passe de là à la composition des forces parallèles et de sens contraires par le procédé connu.

Puis on compose un nombre quelconque de forces parallèles et de même sens, dans un plan, en remarquant que le centre de ces forces parallèles n'est qu'un cas particulier du centre de composition des forces quelconques.

Centre de composition d'un système de points. — Le point auquel Mœbius a donné le nom de *barycentre* d'un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n'est autre que le centre des forces parallèles appliquées aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et ayant des grandeurs proportionnelles à $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Le principe qui fait le fond de cette Note conduit dès lors à la généralisation suivante de la notion de barycentre :

Nous appellerons *centre de composition d'un système de points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un plan, affectés respectivement des coefficients linéaires $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et des coefficients angulaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, le centre de composition du système des forces appliquées aux points A_1, $A_2, \ldots, A_n$, ayant des grandeurs proportionnelles à p_1, $p_2, \ldots, p_n$ et dont les directions fassent avec une droite fixe du plan des angles, comptés dans le même sens, respectivement égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Tous ces angles doivent être rapportés à une même droite du plan, mais cette droite est d'ailleurs arbitraire ; car on voit facilement que passer d'une position de cette droite à une autre revient à faire tourner d'angles égaux autour de leurs points d'application les forces qui défi-

nissent la position du centre de composition, de telle sorte que ce centre ne varie pas.

Pour la même raison, le centre de composition ne change pas lorsqu'on donne aux coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des accroissements égaux.

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, le centre de composition devient le barycentre des points considérés.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DES FOYERS EXTÉRIEURS AU PLAN D'UNE CONIQUE;

PAR M. E. G.,

Ancien élève du lycée de Reims.

On sait que du foyer d'une conique on voit sous un angle constant la portion d'une tangente mobile interceptée par deux tangentes fixes. On peut se demander si cette propriété n'appartient pas aussi aux foyers extérieurs au plan de la conique.

Cherchons donc, étant donnée une conique dans un plan, quels sont les points de l'espace d'où l'on voit sous un angle constant la portion d'une tangente mobile interceptée par deux tangentes fixes.

Je rappellerai d'abord le lemme suivant :

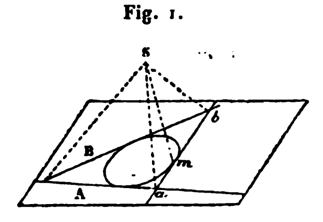
Quand on fait coïncider deux plans en faisant tourner l'un d'eux autour de leur intersection, les points circulaires à l'infini des deux plans viennent coïncider.

Il suffit pour s'en rendre compte de considérer un cercle dans chacun des deux plans.

Cela posé, soient une conique Σ, deux tangentes fixes A et B, et un point S de l'espace satisfaisant à la condition énoncée.

Considérons une tangente quelconque ab. Tous les

Fig. 1.

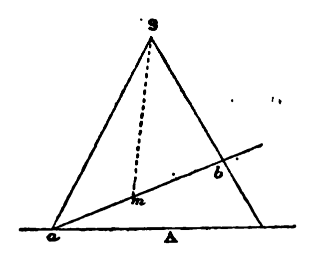


plans tels que Sab enveloppent un cône $S\Sigma$ ayant la conique pour base et le point S pour sommet.

Rabattons tous ces plans sur l'un d'eux, sur le plan SA par exemple, par une rotation autour de leur intersection, telle que Sa avec ce plan.

Nous aurons dans le plan SA deux faisceaux homographiques engendrés par un angle constant aSb tournant autour de son sommet. Les rayons doubles de ces faisceaux seront donc les droites isotropes issues du point S dans le plan SA. Or les rayons doubles correspondent au cas où la droite ab (*fig.* 2) passe par le point S, et, dans

Fig. 2.



ce cas, ab se confond avec ce rayon double, qui n'est autre lui-même que la génératrice correspondante Sm du cône $S\Sigma$. Il en résulte que, dans le cas qui nous occupe, la droite ab sera perpendiculaire à la généra-

trice Sm, puisque les droites isotropes jouissent de la propriété d'être perpendiculaires à elles-mêmes.

LIEU DES POINTS DE RENCONTRE DES TANGENTES COMMUNES A UNE CONIQUE ET A UN CERCLE;

PAR LE P. LE COINTE, S. J.

Par deux points donnés sur une conique, on fait passer une circonférence quelconque variable, puis on mène à ces deux courbes des tangentes communes : trouver le lieu géométrique des points de rencontre de ces tangentes considérées deux à deux.

Cette question a été traitée à diverses reprises dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* [1], mais les géomètres qui s'en sont occupés l'ont toujours résolue en admettant que les deux tangentes communes dont on demande le lieu du point de rencontre sont choisies de telle sorte que leurs deux cordes de contact avec la conique donnée et avec le cercle variable concourent en un même point de la droite joignant les deux points donnés sur cette conique. Comme cette hypothèse ne se réalise qu'autant que l'on fait un choix convenable des deux tangentes considérées parmi les quatre tangentes communes à la conique et au cercle, les solutions susdites sont incomplètes et ne nous paraissent nullement répondre au désir exprimé autrefois par Terquem [2].

---

(1) 2e série, t. II, p. 481 (année 1863), solution de MM. Mister et Neuberg. — 2e série, t. III, p. 49 (année 1864), solution de M. P. Serret. — 2e série, t. XII, p. 23 (année 1873), solution de M. Doucet. — 2e série, t. XIX, p. 91 (année 1880), solution de M. Macé de Lépinay.

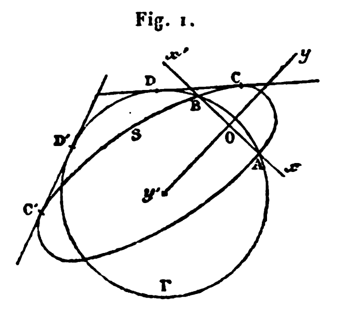
(2) *Nouvelles Annales*, 1re série, t. X, p. 511.

La manière dont nous allons présenter la solution de la question nous semble ne rien laisser à désirer.

Solution. — Désignons par S la conique donnée, par A et B les deux points donnés sur cette conique et par Γ la circonférence variable passant par ces deux points.

Prenons pour axe des x la droite tracée par les deux

Fig. 1.



points A et B, et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite menée par le point O, milieu de la distance AB.

Si l'on pose $OA = OB = p$, les équations des deux courbes S et Γ peuvent s'écrire respectivement

$$(S) \qquad x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey - p^2 = 0,$$

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 - 2dy - p^2 = 0,$$

et, dans ces équations, tous les coefficients sont supposés donnés, sauf d, qui est variable.

Soient α, β les coordonnées d'un point du lieu.

On sait que l'équation des deux tangentes à S issues de ce point (α, β) est

$$\begin{aligned}(\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2E\beta - p^2)(x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey - p^2)\\ - [(\alpha + B\beta)x + (B\alpha + C\beta + E)y + (E\beta - p^2)]^2 = 0,\end{aligned}$$

et que l'équation des deux tangentes à Γ issues de ce

même point est

$$(\alpha^2+\beta^2-2d\beta-p^2)(x^2+y^2-2dy-p^2)$$
$$-[\alpha x+(\beta-d)y-(d\beta+p^2)]^2=0.$$

Comme ces deux couples de tangentes partent du même point (α, β), pour exprimer que ces deux couples n'en font qu'un, il suffit d'exprimer que les coefficients des termes en x^2, xy et y^2, dans ces deux équations, sont respectivement proportionnels ([1]). On a ainsi égalité entre trois rapports, ou, si l'on veut, en désignant par K la valeur commune de ces rapports, on a les trois équations

$$(1)\qquad (C-B^2)\beta^2+2E\beta-p^2=K(\beta^2-2d\beta-p^2),$$
$$(2)\qquad (B^2-C)\alpha\beta+BE\beta-E\alpha-Bp^2=K\alpha(d-\beta),$$
$$(3)\qquad (C-B^2)\alpha^2-2BE\alpha-E^2-Cp^2=K(\alpha^2-p^2-d^2),$$

entre les indéterminées K et d.

Si l'on remarque que le second membre de l'équation (1) peut s'écrire

$$-K[\beta(d-\beta)+(d\beta+p^2)],$$

on voit de suite qu'en ajoutant les équations (1) et (2), après avoir multiplié les deux membres de la seconde par $\frac{\beta}{\alpha}$, il vient

$$E\alpha\beta+BE\beta^2-p^2\alpha-Bp^2\beta=-K\alpha(d\beta+p^2),$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad (E\beta-p^2)(\alpha+B\beta)=-K\alpha(d\beta+p^2).$$

Nous substituerons cette équation à l'équation (1),

([1]) En écrivant que les deux couples de tangentes coupent l'axe des x au même point, le calcul est plus rapide et on obtient l'équation (4) sans transformation. CH. B.

c'est-à-dire que nous considérerons le système des trois équations (2), (3) et (4).

Pour avoir le lieu demandé, il suffit d'éliminer K et d entre ces trois équations. En divisant les équations (2) et (4) membre à membre, on aura une équation du premier degré en d qui fournira la valeur de cette indéterminée en fonction des coordonnées α, β, et, portant cette valeur dans l'équation qui est le résultat des deux équations (2) et (3) divisées membre à membre, on aura l'équation du lieu, que nous désignerons ici par

$$(5) \qquad \Phi(\alpha, \beta) = 0 \quad (^1).$$

Sans nous arrêter davantage, pour le moment, à cette équation générale, qui est du sixième degré en α, β, nous allons étudier plus particulièrement une partie du lieu qu'elle représente.

Lorsqu'une conique quelconque Σ est doublement tangente à deux autres, que nous supposerons être S et Γ, on sait que les deux cordes de contact vont concourir en un certain point qui est le point de rencontre de deux autres droites constituant un système de sécantes communes à ces deux coniques S et Γ. Or, le couple des deux tangentes communes aux deux coniques S et Γ, que nous avons considérées issues du point (α, β), constitue une ligne du second ordre doublement tangente à ces deux coniques, et, par suite, nous pouvons nous proposer de chercher le *lieu des points* (α, β) *pour lesquels les deux*

---

(1) Si l'on représente respectivement par M_1, M_2, M_3 les premiers membres des équations (2), (3), (4), cette équation (5) peut s'écrire

$$\alpha(\beta M_1 + M_2)[\alpha(\beta M_1 + M_2) + (p^2 + \beta^2) M_3] = (p^2 + \beta^2)(M_2^2 + p^2 M_1^2),$$

et, dans cette équation, l'expression

$$\alpha(\beta M_1 + M_2) + (p^2 + \beta^2) M_3$$

n'est que du second degré en α, β. (*Voir* la seconde Note ci-après.)

lignes de contact des deux tangentes communes issues de chacun de ces points vont concourir en un même point de la sécante AB (axe des x), *commune aux deux coniques* S *et* Γ ([1]).

Les équations des deux lignes de contact en question sont respectivement

$$(\alpha + B\beta)x + (B\alpha + C\beta + E)y + (E\beta - p^2) = 0,$$
$$\alpha x + (\beta - d)y - (d\beta + p^2) = 0,$$

et, pour que ces deux lignes rencontrent la droite AB. c'est-à-dire l'axe des x, en un même point, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{p^2 - E\beta}{\alpha + B\beta} = \frac{d\beta + p^2}{\alpha},$$

d'où l'on tire

$$(6)\qquad d\beta + p^2 = \frac{\alpha(p^2 - E\beta)}{\alpha + B\beta},$$

$$(7)\qquad d = -\frac{E\alpha + Bp^2}{\alpha + B\beta}.$$

Portant la valeur (6) de $d\beta + p^2$ dans l'équation (4), il vient

$$(8)\qquad K = \frac{(\alpha + B\beta)^2}{\alpha^2}.$$

Maintenant, si l'on substitue les valeurs précédentes de K et d dans l'une et l'autre des équations (2) et (3), et si, pour abréger, on désigne l'expression

$$(B^2 - C + 1)\alpha^2 + 2B\alpha\beta + B^2\beta^2 + 2BE\alpha + B^2p^2$$

par $F(\alpha, \beta)$, il vient respectivement, pour résultats de

---

([1]) C'est la forme sous laquelle M. Macé de Lépinay a résolu la question (*loc. cit.*).

ces substitutions [1], les deux équations

$$\beta F(\alpha, \beta) = 0, \quad (\alpha^2 - p^2) F(\alpha, \beta) = 0,$$

lesquelles doivent être vérifiées simultanément par les coordonnées α, β de tout point du lieu cherché; d'où il suit que les points de ce lieu sont d'abord tous les points de la conique représentée par l'équation

$$(9) \quad \begin{cases} F(\alpha, \beta) = (B^2 - C + 1)\alpha^2 \\ \qquad + 2B\alpha\beta + B^2\beta^2 + 2BE\alpha + B^2p^2 = 0, \end{cases}$$

et, de plus, les deux points fournis par le système des deux équations

$$\alpha^2 - p^2 = 0, \quad \beta = 0,$$

c'est-à-dire les deux points A et B.

On se rend parfaitement compte de l'existence de ces deux points comme faisant partie du lieu en question en jetant les yeux sur la *fig.* 1, où sont tracées les deux tangentes communes CD, C'D' à la conique S et au cercle Γ, C et D étant les points de contact de la première et C', D' ceux de la seconde. Si l'on fait varier le cercle Γ de manière qu'il tende à devenir tangent en B à la conique S, alors les deux droites CD et C'D' tendront à se confondre avec la tangente en B à cette conique, et leur point de rencontre tendra lui-même vers B comme position limite. Quant aux deux cordes de contact CC', DD', elles tendront aussi à s'identifier avec la tangente en B à la conique S. Ainsi le point B est bien un point du lieu cherché. Il en est de même du point A [2].

Relativement à l'équation (9), comme tout système de valeurs de α, β qui vérifient cette équation est aussi une solution de l'équation (5), le premier membre de

---

(1) *Voir* la première Note ci-après.

(2) Cette explication est singulièrement contestable. Ch. B.

cette équation (9) doit être un diviseur de la fonction $\Phi(\alpha, \beta)$, ce qui amène ainsi la décomposition de l'équation (5) en deux autres, *l'une du second degré*, qui est l'équation (9), et *l'autre du quatrième degré*. Cette décomposition sera donnée dans la seconde Note ci-après.

La conique (9) se réduit à une seule droite, qui est l'axe des y, si l'on a $B = 0$; et, comme cela a lieu tant que C est $\gtrless 1$, on peut en conclure qu'il en est encore ainsi pour $C = 1$; dans cette circonstance la conique S est un cercle.

Si $B \gtrless 0$, la conique (9) est une *ellipse*, une *hyperbole* ou une *parabole*, selon qu'on a

$$B^2 - C > \text{ ou } < \text{ ou } = 0,$$

c'est-à-dire selon que la conique S est une *hyperbole*, une *ellipse* ou une *parabole*.

Pour que la conique (9) fût un système de deux droites, on devrait avoir

$$p^2(B^2 - C) = E^2, \tag{10}$$

ce qui entraînerait $B^2 - C > 0$. Mais alors la conique (9) ne serait qu'un système de deux droites imaginaires, ou plutôt elle serait réduite à un seul point réel, et cela ne peut avoir lieu ici, car, si l'on pose $B^2 - C = l^2$, l^2 désignant une quantité positive quelconque, l'équation de la conique S devient

$$x^2 + 2Bxy + (B^2 - l^2)y^2 + 2Ey - \frac{E^2}{l^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$l^2(x + By)^2 - (l^2y - E)^2 = 0.$$

Cette conique S serait donc elle-même un système de deux droites, ce qu'on ne suppose pas dans la question traitée ci-dessus.

La relation (10) se présenterait si l'on avait $p = 0$, $E = 0$, ou bien $C = B^2$, $E = 0$; mais, dans ces deux cas la conique S ne serait plus qu'un système de deux droites.

PROPRIÉTÉS RELATIVES A LA CONIQUE (9).

I. *La conique* (9) *et la conique* S *sont homofocales*. Car, si l'on désigne par (ξ, η) les coordonnées d'un foyer de la conique S et par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation de cette conique, on a les deux relations

$$4(1 - C) f(\xi, \eta) = f_\xi'^2 - f_\eta'^2, \quad 4 B f(\xi, \eta) = f'_\xi f'_\eta,$$

c'est-à-dire

$$(11) \begin{cases} (B^2 - C)(\eta^2 - \xi^2) - 2BE\xi \\ \qquad\qquad - 2E\eta - E^2 + p^2(1 - C) = 0, \\ (B^2 - C)\xi\eta - E\xi + BE\eta - Bp^2 = 0. \end{cases}$$

Or, on sait aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que le point (ξ, η) soit un foyer de la conique (9) est que l'on ait les deux relations

$$4(1 - C) F(\xi, \eta) = F_\xi'^2 - F_\eta'^2, \quad 4 B F(\xi, \eta) = F'_\xi F'_\eta,$$

et l'on vérifie sans peine que ces deux relations ne sont autres que les relations (11). Donc, etc.

II. La conique S étant supposée fixe, invariable, traçons une corde quelconque parallèle à la droite AB, et soit $y = \lambda$ l'équation de cette corde.

Désignons par x_0, y_0 les coordonnées du point O', milieu de cette corde. L'équation qui donne les abscisses des points de rencontre A' et B' de cette droite $y = \lambda$ avec la conique S est

$$x^2 + 2B\lambda x + C\lambda^2 + 2E\lambda - p^2 = 0,$$

et, par suite, on a $x_0 = -B\lambda$; d'ailleurs $y_0 = \lambda$.

Transportons les axes des coordonnées parallèlement à eux-mêmes en ce point (x_0, y_0) : l'équation de la conique S devient, en y faisant $x = X - B\lambda$, $y = Y + \lambda$,

$$X^2 + 2BXY + CY^2 + 2[(C - B^2)\lambda + E]Y + (C - B^2)\lambda^2 + 2E\lambda - p^2 = 0,$$

et par suite, si l'on résout la question précédente relativement à la même conique S et en substituant la corde A′B à la corde AB, la conique qui correspondra à la conique (9) aura pour équation, par rapport au nouveau système d'axes de coordonnées,

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} (B^2 - C + 1)X^2 + 2BXY + B^2Y^2 \\ \quad + 2B[(C - B^2)\lambda + E]X + B^2[p^2 - 2E\lambda - (C - B^2)\lambda^2] = 0. \end{array} \right.$$

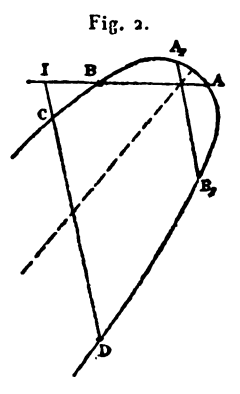
Si l'on revient au système primitif d'axes de coordonnées, cette équation (12) se transforme en l'équation (9), d'où résulte cette propriété que, *relativement au lieu géométrique, objet de la question traitée précédemment, la partie de ce lieu consistant en la conique* (9) *ne change pas si la corde* AB *se déplace parallèlement à elle-même dans la conique* S *supposée fixe, invariable.*

III. Dans la conique S, considérons la corde A_1B_1, symétrique de AB par rapport à l'axe focal, et traçons dans cette même conique une corde quelconque CD parallèle à A_1B_1. Soit I le point où elle rencontre AB.

Désignons par S′ la conique (9) et par S'_1 la nouvelle conique qui serait substituée à celle-là si l'on remplaçait les deux points fixes A et B par A_1 et B_1 ou, ce qui revient au même d'après la propriété précédente, par C et D. Je dis que *ces deux coniques* S′ *et* S'_1 *n'en font qu'une.*

En effet, la corde CD étant parallèle à A_1B_1, droite symétrique de AB par rapport à l'axe focal, on sait que

Fig. 2.



les quatre points A, B, C, D appartiennent à un même cercle Γ_1, et, comme cette corde CD a été menée quelconque parallèlement à A_1B_1, on peut obtenir ainsi une infinité de cercles Γ_2, Γ_3, ... tels que Γ_1, passant chacun par les deux points A et B et en même temps par les extrémités d'une corde de la conique S parallèle à A_1B_1. Or, si nous considérons la conique S et l'un de ces cercles, par exemple Γ_1, AB et CD sont un système de sécantes communes à ces deux courbes, et il y a un couple de tangentes communes à ces deux mêmes courbes pour lesquelles les deux cordes de contact concourent en I. Le point M d'intersection de ces deux tangentes est alors un point de S' et aussi de S'_1. Ces deux coniques S' et S'_1 se trouvent ainsi avoir une infinité de points communs; donc elles se confondent.

Les deux dernières des trois propriétés précédentes ont été indiquées par MM. Mister et Neuberg et par M. Macé de Lépinay (*loc. cit.*); mais leurs démonstrations sont différentes de celles que nous venons de donner.

Première Note. — Lorsqu'on porte les valeurs de K et de d dans l'équation (3), il vient d'abord

$$(B^2 - C + 1)\alpha^4 + 2B\alpha^3\beta + B^2\alpha^2\beta^2 + 2BE\alpha^3$$
$$= (1 - C)p^2\alpha^2 + 2Bp^2\alpha\beta + B^2p^2\beta^2 + 2BEp^2\alpha + B^2p^4,$$

et, ajoutant aux deux membres de cette dernière équation la quantité $B^2p^2\alpha^2$, elle peut s'écrire

$$[(B^2 - C + 1)\alpha^2 + 2B\alpha\beta$$
$$+ B^2\beta^2 + 2BE\alpha + B^2p^2](\alpha^2 - p^2) = 0.$$

Seconde Note. — L'équation (5) étant développée, si l'on divise son premier membre par celui de l'équation (9), on obtient pour seconde équation, qui avec cette dernière représente les deux courbes constituant le lieu de l'équation (5),

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} r^2[p^2 - (B^2 - C)\beta^2]\alpha^2 \\ \quad - 2Bp^2(E\beta - p^2)\alpha\beta - (\beta^2 + p^2)(E\beta - p^2)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Relativement à la courbe du quatrième degré, représentée par cette dernière équation (13), nous nous bornerons aux indications suivantes :

1° Si $B^2 - C$ est > 0, elle a deux asymptotes parallèles à l'axe des x, lesquelles sont représentées par les équations

$$y = \pm \frac{p}{\sqrt{B^2 - C}},$$

et elle n'en a aucune autre.

De plus, selon qu'on a

$$(B^2 - C)p^4 - (C + 1)E^2p^2 - E^4 < \text{ ou } = \text{ ou } > 0,$$

le point dont les coordonnées sont $0, \frac{p^2}{E}$ est un point double ordinaire, ou un point de rebroussement, ou un point isolé de la courbe.

2° Si $B^2 - C$ est < 0, la courbe n'a pas d'autres asymptotes que les deux droites représentées par les équations

$$y = \frac{pR}{E}x + \frac{p(pR - BE)}{ER}, \quad y = -\frac{pR}{E}x + \frac{p(pR + BE)}{ER},$$

dans lesquelles R désigne la racine carrée positive de la quantité $C - B^2$.

3° Si $B^2 - C = 0$, elle n'a aucune asymptote réelle située à distance finie.

4° Dans le cas de $B^2 - C \leqq 0$, le point dont les coordonnées sont $0, \frac{p^2}{E}$ est un point double ordinaire de la courbe.

5° La courbe rencontre l'axe des x aux deux points A et B et en aucun autre point réel [1]. Nous trouvons ici ces deux points comme faisant partie du *lieu* représenté par l'équation (13), parce que, supposant, par exemple, que le cercle variable Γ tende à devenir tangent en B à la conique S, du moment qu'il n'est pas considéré dans cette position limite, les deux tangentes CD et C'D' dont il a été question ci-dessus donnent toujours un point de rencontre qui appartient à ce *lieu*.

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES TÉTRAÈDRES DONT LES ARÊTES OPPOSÉES SONT ÉGALES DEUX A DEUX, ET SOLUTION DE LA QUESTION 1272;

PAR M. EM. LEMOINE.

Soit SABC le tétraèdre

$$(SA = CB = a, \ SB = AC = b, \ SC = AB = c).$$

---

[1] L'auteur s'est imposé inutilement la condition que l'axe des x coupe la conique en deux points réels. CH. B.

Soient

A', B', C', α, β, γ les milieux de SA, SB, SC, BC, AC, AB;

ω_s, ω_a, ω_b, ω_c les pieds sur chaque face des hauteurs du tétraèdre;

ω'_s, ω'_a, ω'_b, ω'_c les points de concours des hauteurs de chaque face;

O le centre de gravité;

O_s le centre du cercle circonscrit à la face ABC.

Soient

x l'angle que la face SAC fait avec SAB;

x' l'angle que la face CBA fait avec CBS;

y, y', z, z' les autres angles des faces entre elles.

Si, dans un tétraèdre, les quatre faces sont équivalentes, elles sont égales et, par suite, les arêtes opposées sont égales deux à deux.

En écrivant que la somme des projections de trois faces sur la quatrième est égale à cette quatrième, on a

$$1 = \cos x' + \cos y' + \cos z',$$
$$1 = \cos x + \cos y + \cos z',$$
$$1 = \cos y + \cos z + \cos x',$$
$$1 = \cos z + \cos x + \cos y'.$$

Ajoutons ensemble les deux premières de ces équations, puis les deux dernières; retranchons ces deux sommes l'une de l'autre, et divisons par 2, il vient

$$0 = \cos z' - \cos z;$$

d'où, *sans ambiguïté*, $z = z'$. On aurait de même $x = x'$, $y = y'$.

Les angles trièdres de chaque sommet étant composés

de dièdres égaux entre eux deux à deux, ces trièdres sont égaux; les angles plans de ces trièdres sont donc égaux deux à deux; les faces du tétraèdre sont alors semblables; mais, comme elles sont équivalentes par hypothèse, elles sont égales, etc.

On a

$$\beta B = \beta S,$$

puisque les triangles SCA, BCA sont égaux; donc $\beta B'$ est perpendiculaire à SB. Par suite, $OS = OB$; de même, $OS = OA$, $OS = OC$. On voit donc que :

Le centre de la sphère circonscrite coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre.

La distance de O à chaque face est le quart de la hauteur du tétraèdre opposée à cette face. Mais ces hauteurs sont égales; donc le point O est à égale distance des quatre faces, c'est-à-dire que :

Le centre de la sphère inscrite au tétraèdre coïncide avec le centre de gravité.

$\omega_s O_s$, $\omega_a O_a$, $\omega_b O_b$, $\omega_c O_c$ sont égaux comme représentant la distance de points analogues dans les faces qui sont des triangles égaux. Mais ces longueurs égales représentent aussi les distances de O aux hauteurs $S\omega_s$, $S\omega_a$, $S\omega_b$, $S\omega_c$; donc :

Il y a une sphère de centre O *tangente aux quatre hauteurs du tétraèdre.*

Soit M_s le centre de gravité de ACB; M_s, O_s, ω_s sont en ligne droite, et $O_s\omega_s = 3M_sO_s$. Mais M_s, ω'_s, O_s sont aussi en ligne droite, et l'on a

$$O_s\omega'_s = 3M_sO_s,$$

d'après un théorème connu. Donc enfin ω_1, ω'_1, O_1 sont en ligne droite, et l'on a

$$O_1\omega_1 = O_1\omega'_1.$$

Par suite, la sphère tangente à $S\omega_1$ et de centre O est tangente à la perpendiculaire menée en ω'_1 à la face ABC, d'où :

Il y a une sphère de centre O *tangente aux perpendiculaires à chaque face menées par son point de concours des hauteurs.*

Les théorèmes démontrés jusqu'ici [théorèmes que nous avons donnés au mois d'août 1875 à la Section de Mathématiques, à Nantes, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, les uns sous une forme identique, les autres sous des formes peu différentes (*voir* le Volume des Communications faites au Congrès)] donnent la solution de la question 1272.

$A'\alpha$ est perpendiculaire sur BC et sur SA ; donc :

Les perpendiculaires communes aux arêtes opposées passent par les milieux de ces arêtes et, par suite, se coupent au centre de gravité.

Il est facile de voir que : *les trois perpendiculaires communes aux arêtes opposées sont rectangulaires deux à deux* et que l'on a

$$\alpha A' = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2},$$

$$\beta B' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2},$$

$$\gamma C' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Le triangle OSA', rectangle en A', donne

$$\overline{OS}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{SA'}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

C'est le carré du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.

Appelons R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC ; on a

$$\overline{OO_{,}}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{O_{,}A}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - R^2.$$

C'est le carré du rayon de la sphère inscrite au tétraèdre.

Puisque O est aussi le centre de gravité du tétraèdre, la hauteur $S\omega_{,} = 4OO_{,}$; donc, en appelant P la surface du triangle ABC, on a

$$\overline{S\omega_{,}}^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{a^2 b^2 c^2}{P^2},$$

et l'on peut mettre le second membre sous la forme

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8P^2}.$$

Le triangle rectangle $OO_{,}M_{,}$ donne

$$\overline{O_{,}M_{,}}^2 = \overline{OM_{,}}^2 - \overline{OO_{,}}^2.$$

Mais

$$OM_{,} = \frac{1}{3} OS;$$

donc

$$\overline{O_{,}M}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Comme $O_{,}M_{,}$ est le tiers de $O_{,}\omega'_{,}$, on a ce théorème :

Dans un triangle ABC, *le carré de la distance du centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs est égal à neuf fois le carré du rayon du cercle circonscrit, moins la somme des carrés des trois côtés.*

J'avais donné ce théorème dans les *Nouvelles Annales* il y a quelques années : j'ai vu depuis qu'il y avait déjà été démontré par M. Brassine.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les éléments de Géométrie cinématique; par M. *Mannheim*. Paris, Gauthier-Villars; 1880.

Cet important Ouvrage, que nous essayerons d'analyser sommairement, vient combler une véritable lacune et est appelé, selon nous, à faire sensation dans le monde savant et dans le monde enseignant spécialement.

Bien que l'auteur se soit imposé de suivre exactement le programme de son Cours à l'École Polytechnique, son Livre ne ressemble en rien à ceux qui ont pu le précéder et traiter avant lui des mêmes matières. Le cadre, si l'on veut, est bien le même, mais ce qu'il renferme est essentiellement nouveau. D'ailleurs, par des suppléments très développés ajoutés à la fin de chaque Chapitre, M. Mannheim s'accorde la latitude nécessaire pour s'étendre longuement sur les théories qu'il n'aurait pu introduire dans les limites un peu étroites du programme.

La première Partie de l'Ouvrage est consacrée à l'étude des différents procédés employés pour la représentation graphique des objets. La méthode élémentaire des *projections orthogonales* étant supposée connue, les modes de représentation étudiés sont la *projection cotée*, la

perspective conique, la *perspective cavalière*, enfin les *perspectives isométrique* et *axonométrique*.

Cette première Partie est, bien entendu, la moins originale. L'auteur, comme il le dit dans sa Préface, a conservé sans changement le *trait de perspective* exposé par son prédécesseur, M. de la Gournerie dans son excellent *Traité de perspective linéaire*. Çà et là cependant, quelques démonstrations nouvelles, quelques échappées sur la Géométrie pure portent bien le caractère de leur auteur. Je citerai notamment à la perspective cavalière du cercle (p. 119) une ingénieuse construction des axes de l'ellipse perspective, et plus loin (p. 126) d'intéressantes conséquences déduites de la perpective cavalière de la sphère.

J'arrive rapidement à la seconde Partie, à la partie vraiment neuve de l'Ouvrage.

Cette seconde Partie est, à proprement parler, un complément de Géométrie pure; elle comprend l'étude des courbes planes et gauches et la théorie de la courbure des surfaces, ainsi que de nombreuses applications. M. Mannheim y a réuni et présenté pour la première fois, sous forme didactique, un ensemble de théorèmes qui constitue ce qu'il appelle très exactement la *Géométrie cinématique*, et c'est à l'aide de ces théorèmes généraux qu'il aborde et résout géométriquement les principales questions relatives aux courbes et aux surfaces.

La *Cinématique* étant cette branche de la Mécanique qui traite du mouvement, abstraction faite des causes qui le produisent, on conçoit que parmi les théorèmes qu'elle démontre il peut y en avoir qui soient indépendants de la quatrième variable, du temps. Ces résultats, purement géométriques, mais obtenus au moyen de déplacements, forment une partie de la *Géométrie cinéma-*

tique. Mais la Géométrie cinématique renferme quelque chose de plus.

Comme le dit très justement M. Resal ([1]) : « La Géométrie cinématique de M. Mannheim n'est pas simplement la partie géométrique de la Cinématique, telle qu'on l'étudiait jusqu'ici : elle comprend en outre les figures mobiles de forme variable, ainsi que la recherche des propriétés relatives aux figures de forme invariable pour lesquelles le déplacement n'est pas absolument défini et dont, avant M. Mannheim, on ne s'était jamais occupé. »

Parmi les principaux théorèmes qui constituent ce corps de doctrine, nous citerons les belles propriétés démontrées par M. Chasles sur les foyers et les caractéristiques des plans et sur les droites conjuguées, le théorème général dû à M. Mannheim lui-même et relatif au déplacement d'une figure assujettie à quatre conditions (p. 261), les propriétés des *pinceaux* et celles des *normalies*, c'est-à-dire des surfaces gauches formées par les normales à une même surface (p. 265 et suivantes).

C'est, comme nous l'avons dit, la première fois que ces importants résultats, épars dans de nombreux Mémoires, sont réunis, présentés sous une forme claire et simple, et définitivement introduits dans l'enseignement.

Nous n'avons qu'un regret : c'est que les nécessités du programme aient obligé l'auteur à couper, par de nombreuses applications, cette suite de théorèmes, dont l'enchaînement et la belle unité seraient plus visibles encore s'ils formaient une suite ininterrompue.

Au moyen des résultats de la Géométrie cinématique,

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 19 décembre 1879.

M. Mannheim démontre avec une grande élégance les théorèmes généraux sur les surfaces, tels que ceux de Meusnier, d'Euler et celui de Charles Dupin sur les surfaces orthogonales.

A côté de cette théorie de la courbure des surfaces vient celle des classes de surfaces particulières, surfaces développables, surfaces réglées, surfaces de révolution, puis l'étude détaillée de quelques surfaces importantes, comme les hélicoïdes, le biais passé gauche et enfin la surface de l'onde, à laquelle tout un Chapitre (p. 237) est consacré. Nous appellerons spécialement l'attention sur la démonstration extrêmement ingénieuse qui fournit la construction des points de cette surface, définie d'abord par ses plans tangents (p. 242). Dans le supplément de la vingt-deuxième Leçon, l'auteur revient encore sur la surface de l'onde et donne la construction de ses centres de courbure principaux, ainsi que la détermination des ombilics.

Enfin les propriétés des courbes d'ombres se déduisent sans difficulté de l'étude générale des surfaces et conduisent à des constructions simples pour les points de la courbe et sa tangente dans les principaux cas que l'on a à étudier.

Tel est, très en résumé, le contenu de cette seconde Partie, où l'on trouvera un nombre considérable de théorèmes nouveaux, démontrés ou énoncés simplement, et aussi de précieuses indications bibliographiques à la fin, pour ainsi dire, de chaque Chapitre.

Maintenant, après avoir analysé sommairement la substance de l'Ouvrage, nous voudrions caractériser en quelques mots l'esprit de ses méthodes et de ses démonstrations.

Ceux qui, sortant de la Géométrie des anciens, aborderont pour la première fois cette Géométrie moderne éprouveront sans doute quelque chose d'analogue au

sentiment de celui qui, habitué aux lignes régulières et classiques de l'architecture grecque, se trouverait pour la première fois en face d'un spécimen de l'architecture gothique avec ses combinaisons imprévues et ses sveltes élégances. Dans les démonstrations il y a souvent de l'inattendu, de la surprise. Ce ne sont pas ces voies droites et battues où l'on sent que chaque pas vous rapproche du terme à atteindre. On aborde avec l'auteur des chemins nouveaux où, le suivant de confiance, on se trouve soudainement transporté au but ([1]).

C'est là ce qui fait qu'il est essentiel de se familiariser pendant quelque temps avec ces ingénieuses méthodes, qui, souvent, surprendront au premier abord.

En somme, le *Cours de Géométrie* de M. Mannheim vient combler, comme nous le disions d'abord, une lacune des plus importantes. Lorsque l'enseignement de la Géométrie fut institué à l'École Polytechnique, ce devait être évidemment, non un Cours de science pure, mais simplement un Cours d'applications.

Les découvertes encore récentes dues aux grands savants du siècle dernier avaient donné aux méthodes analytiques un si prodigieux essor, qu'on en était venu à envisager le calcul comme l'outil scientifique par excellence et à négliger tout autre procédé d'investigation. Sans faire ici la critique de l'Analyse, sans nier la puissance et la généralité de ses méthodes, il est permis de trouver excessif cet engouement qui expropriait tout à son profit.

D'abord il est incontestable, et les découvertes géométriques récentes l'ont assez prouvé, que dans une foule de recherches la Géométrie pure conduit à des solutions plus simples, plus rapides que celles de l'Analyse propre-

([1]) *Voir*, à l'appui de ce que j'avance, les très remarquables et ingénieuses démonstrations des théorèmes d'Euler et de Meusnier.

ment dite : il suffit de rappeler, en dehors de l'Ouvrage de M. Mannheim, les beaux travaux de Poncelet et de M. Chasles pour s'en convaincre.

Ensuite, et c'est là le point capital, on ne saurait trop insister sur la pensée si juste exprimée par Lamé et que M. Mannheim cite à la fin de sa Préface :

Les études suivies à l'École Polytechnique sont loin d'être uniquement destinées à faire connaître une suite de calculs, de formules, de figures, de phénomènes physiques et chimiques; leur utilité principale est d'exercer cette faculté de l'intelligence à laquelle on donne le nom de raisonnement.

C'est là, effectivement, le vrai caractère de l'École Polytechnique, et il n'est pas inutile d'y insister, à un moment où cette École, en butte à de nombreuses et injustes attaques, est souvent critiquée dans son principe même et faussement comparée à l'École Normale, dont le but, tout autre, est de former exclusivement des professeurs et des savants.

En nous plaçant donc à ce point de vue, qui doit être, selon nous, celui de l'enseignement de l'École, nous trouverions extrêmement regrettable que, fidèle aux programmes primitifs, on ne développât point ce côté purement géométrique de l'enseignement, car ce qui fait précisément le caractère de la Géométrie pure, c'est la profonde variété de ses méthodes, contrairement à l'Analyse qui, par des procédés uniformes, arrive à résoudre les problèmes les plus divers et en vient souvent à transformer les opérations du raisonnement en un travail presque mécanique.

A ce point de vue, l'Ouvrage de M. Mannheim nous paraît infiniment intéressant. Il montre ce que peut et doit devenir, selon nous, l'enseignement de la Géométrie à l'École Polytechnique. P. Haag.

QUESTIONS.

1341. D'un point donné M on abaisse les normales à une conique; soient a_i et a_j deux quelconques des pieds de ces normales, α_{ij} le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur la corde $a_i a_j$, et β_{ij} le conjugué harmonique du point α_{ij} relativement aux points a_i et a_j.

Il y a six points β_{ij}: démontrer qu'ils sont les sommets d'un quadrilatère complet.

Quelle est la propriété analogue relativement à une surface du second ordre? LAGUERRE.

1342. D'un point donné M on mène deux droites normales à une parabole; soient a et b leurs pieds, α le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur la corde ab et β le conjugué harmonique de α relativement aux points a et b : démontrer que le point β est sur la droite menée par M perpendiculairement à l'axe de la parabole.

Même question pour le paraboloïde.

LAGUERRE.

1343. On donne un triangle ABC et un point P. Soient respectivement α, β et γ les points où les côtés du triangle rencontrent les droites PA, PB et PC.

On suppose que les droites menées par les points α, β et γ, perpendiculairement aux côtés correspondants BC, CA et AB, se coupent en un même point M.

Déterminer : 1° le lieu décrit par le point P; 2° le lieu décrit par le point M. LAGUERRE.

SUR UN THÉORÈME DE M. LAGUERRE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

M. Laguerre a exposé dernièrement quelques considérations nouvelles et fort remarquables sur la séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients numériques (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 1, et t. XIX, p. 49; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 octobre 1879).

Voici, je pense, une manière plus simple et plus élémentaire de présenter le principal résultat, sans qu'il soit nécessaire d'employer la théorie des dérivées.

THÉORÈME DE LAGUERRE. — *Soient $f(x) = 0$ une équation algébrique, a un nombre positif, et*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)}{x-a} &= f_0\, x^{m-1} + f_1 x^{m-2} \\ &\quad + f_2 x^{m-3} + \ldots + f_{m-1} + \frac{f_m}{x-a}. \end{aligned} \right.$$

Le nombre des variations de la suite

$$(2)\qquad f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{m-1},\ f_m$$

est au moins égal au nombre des racines de l'équation donnée qui sont plus grandes que a. Si le nombre des racines plus grandes que a est inférieur au nombre des variations de la suite, la différence est un nombre pair.

Nous remarquerons d'abord que pour $a = 0$ on retrouve le théorème de Descartes. Quant à la démonstration, elle est absolument semblable à celle que l'on

donne dans les Cours pour ce dernier théorème. En effet, soit b un nombre plus grand que a; si l'on multiplie le premier membre de l'équation (1) par $x-b$, on a

$$\frac{(x-b)f(x)}{x-a} = g_0 x^m + g_1 x^{m-1} + \ldots$$
$$+ g_{m-1}x + g_m - (b-a)\frac{f_m}{x-a},$$

et l'on démontre de même que le nombre des variations de la suite

(3) $\qquad g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_{m-1},\ g_m,\ -bf_m$

surpasse au moins d'une unité, et en général d'un nombre impair, le nombre des variations de la suite (2).

C. Q. F. D.

Cela posé, soient l'équation

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

et a un nombre positif; on calcule successivement

$$\begin{aligned}
f_0 &= A_0,\\
f_1 &= A_0 a + A_1,\\
f_2 &= A_0 a^2 + A_1 a + A_2,\\
f_3 &= A_0 a^3 + A_1 a^2 + A_2 a + A_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_m &= A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots + A_m.
\end{aligned}$$

Le nombre des variations de $(f_0, \ldots, f_m)$ est une limite supérieure du nombre des racines plus grandes que a. De même, en changeant x en $\frac{1}{x}$, on déduit que le nombre des racines de l'équation proposée comprises entre 0 et a ne peut surpasser le nombre des variations

de la suite

$$\begin{array}{l} A_m, \\ A_m \frac{1}{a} + A_{m-1}, \\ A_m \frac{1}{a^2} + A_{m-1} \frac{1}{a} + A_{m-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_m \frac{1}{a^m} + A_{m-1} \frac{1}{a^{m-1}} + \dots + A_0; \end{array}$$

de plus, si ces deux nombres diffèrent, la différence est un nombre pair.

Exemple. — Soit l'équation

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = 0.$$

D'après le théorème de Descartes, il y a, au plus, quatre racines positives.

Pour $a = 1$, on forme la suite

$$+1, \ -3, \ 0, \ -2, \ +5, \ +6;$$

donc il y a au plus deux racines plus grandes que 1 ; en formant la suite inverse, on trouve

$$+1, \ +8, \ +6, \ +9, \ +5, \ +6;$$

donc il n'y a pas de racines réelles entre 0 et 1 ; ainsi il y a au plus deux racines positives, que l'on sépare en faisant $a = 2$.

Remarque. — On peut appliquer les considérations qui précèdent aux équations de la forme

$$f(x) + \frac{A}{(x-a)\varphi(x)} = 0 \quad \text{et} \quad f(x) + \frac{A}{x-a}\varphi(x) = 0,$$

et l'on obtient des théorèmes intéressants.

SUR LE MÊME THÉORÈME;

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LUCIEN LÉVY,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

Voici, relativement à la méthode si ingénieuse de M. Laguerre pour la séparation des racines, une remarque que vous jugerez peut-être digne d'intérêt.

La limite supérieure indiquée par M. Laguerre pour les racines positives d'une équation est toujours au moins égale à celle que donne la méthode de Newton.

En effet, posons, comme M. Laguerre,

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{m-p}(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_m(x) = A_0;$$

on a

$$f'_{m-p}(x) = p A_0 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1},$$

ce qu'on peut écrire

$$f'_{m-p}(x) = x^{p-1} f_m(x) + x^{p-2} f_{m-1}(x) + \ldots + f_{m-p+1}(x).$$

Donc, si $f_m(x)$, $f_{m-1}(x)$, ..., $f_{m-p+1}(x)$ sont positives, $f'_{m-p}(x)$ l'est aussi; de même, $f'_{m-p-1}(x)$, $f'_{m-p+2}(x)$, ... sont positives. Alors $f''_{m-p}(x)$, qui ne dépend que des fonctions $f_m(x)$, $f_{m-1}(x)$, ..., $f_{m-p+1}(x)$ et de leurs premières dérivées, est positive; de même $f'''_{m-p}(x)$, et ainsi de suite.

Donc, si $f_{m-p}(x)$, $f_{m-p+1}(x)$, ..., $f_m(x)$ sont positives, les fonctions de Newton $f_{m-p}(x)$, $f'_{m-p}(x)$, $f''_{m-p}(x)$, ... le sont aussi. C. Q. F. D.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES;

PAR M. CH. BIEHLER.

I. Considérons l'équation

$$(1)\qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A + Bi,$$

dans laquelle le module du second membre est égal à l'unité; nous allons démontrer que les racines de cette équation sont réelles et inégales.

En effet, soit $a_\mu + ib_\mu$ une des m valeurs de l'expression $\sqrt[m]{A+Bi}$; on sait que $a_\mu^2 + b_\mu^2 = 1$, et la racine x_μ de l'équation (1) correspondant à cette valeur sera donnée par l'équation

$$(2)\qquad \frac{1+ix_\mu}{1-ix_\mu} = a_\mu + ib_\mu,$$

d'où

$$(3)\qquad x_\mu = \frac{i(1-a_\mu - ib_\mu)}{1+a_\mu+ib_\mu}.$$

En multipliant les deux termes du second membre par $1 + a_\mu - ib_\mu$, il viendra

$$x_\mu = \frac{2b_\mu}{(1+a_\mu)^2 + b_\mu^2}$$

ou

$$(4)\qquad x_\mu = \frac{b_\mu}{1+a_\mu}.$$

Toutes les racines de l'équation (1) sont donc réelles.

Elles sont inégales, car, si deux racines x_λ, x_μ étaient

égales, on aurait

$$(5) \qquad \frac{b_\lambda}{1 + a_\lambda} = \frac{b_\mu}{1 + a_\mu}.$$

En vertu des relations

$$a_\lambda + b_\lambda^2 = 1,$$
$$a_\mu^2 + b^\mu = 1,$$

l'équation (5) devient

$$(6) \qquad \frac{1 - a_\lambda}{b_\lambda} = \frac{1 - a_\mu}{b_\mu}.$$

La comparaison des égalités (5) et (6) donne

$$a_\lambda = a_\mu, \quad b_\lambda = b_\mu;$$

par suite, comme les m valeurs de $\sqrt[m]{A + Bi}$ sont distinctes, les m racines de l'équation (1) seront aussi distinctes.

II. Comme première application de ce théorème, nous allons démontrer algébriquement que les racines de l'équation de degré m qui donne les valeurs de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{m}$, connaissant $\operatorname{tang}\alpha$, sont réelles et inégales.

Cette équation peut s'écrire

$$(7) \qquad ia = \frac{(1 + ix)^m - (1 - ix)^m}{(1 + ix)^m + (1 - ix)^m},$$

en posant

$$\operatorname{tang}\alpha = a \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{m} = x.$$

L'équation (7) peut aussi se mettre sous la forme

$$(1 + ix)^m(1 - ia) - (1 - ix)^m(1 + ia) = 0$$

ou bien

$$(8) \qquad \left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^m = \frac{1 + ia}{1 - ia}.$$

Le second membre de cette équation est une expression dont le module est égal à l'unité ; ce module est, en effet, la racine carrée de la quantité

$$\frac{(1-a^2)^2+4a^2}{(1+a^2)^2};$$

on en conclut, en se reportant au théorème démontré précédemment, que les racines de l'équation (7) sont réelles et inégales.

Pour la même raison, les racines des équations

$$(9) \qquad (1+ix)^m-(1-ix)^m=0,$$

$$(10) \qquad (1+ix)^m+(1-ix)^m=0,$$

tirées de (7) en y faisant $a=0$ et $a=\infty$, sont réelles et inégales.

On peut d'ailleurs les mettre sous la forme

$$(11) \qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m=1,$$

$$(12) \qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m=-1;$$

les seconds membres ont pour module l'unité.

III. Comme seconde application du même théorème, nous allons démontrer que les racines de l'équation de degré m qui donne $\cos\frac{\alpha}{m}$ quand on connait $\cos\alpha$ sont réelles.

Si l'on pose $\cos\frac{\alpha}{m}=x$, $\cos\alpha=a$, l'équation dont il s'agit est

$$(13) \qquad \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m-2a=0.$$

Faisons actuellement la substitution

$$x=\frac{1-y^2}{1+y^2},$$

à toute valeur réelle de y correspond une valeur réelle de x.

Par cette substitution, $x^2 - 1$ devient $\frac{-4y^2}{(1+y^2)^2}$, et l'équation (13) prend la forme

$$(14)\qquad \frac{(1+2iy-y^2)^m+(1-2iy-y^2)^m}{(1+y^2)^m} - 2a = 0,$$

ou bien

$$(15)\qquad \frac{(1+iy)^{2m}+(1-iy)^{2m}}{(1+y^2)^m} - 2a = 0,$$

ou enfin

$$(16)\qquad \left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)^m + \left(\frac{1-iy}{1+iy}\right)^m - 2a = 0.$$

Cette équation est du deuxième degré en $\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)^m$; elle donne

$$(17)\qquad \left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)^m = a \pm i\sqrt{1-a^2}.$$

Le module de chacune des expressions $a+i\sqrt{1-a^2}$, $a-i\sqrt{1-a^2}$ est égal à l'unité; par suite, les racines de l'équation en y sont toutes réelles.

On obtient ainsi $2m$ valeurs de y; ces $2m$ valeurs de y ne fournissent que m valeurs de x. Les expressions conjuguées $a+i\sqrt{1-a^2}$, $a-i\sqrt{1-a^2}$ fournissent en effet, pour $\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)$, des valeurs qui sont elles-mêmes conjuguées; par suite, les valeurs de y correspondantes seront de signes contraires. Les valeurs de y^2 sont donc égales deux à deux et donnent une seule et même valeur pour x.

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES;

PAR M. H. LAURENT.

On sait que, étant donnée une équation $M dx + N dy = 0$, il existe toujours un multiplicateur λ tel que

$$\lambda M dx + \lambda N dy$$

soit la différentielle d'une fonction φ, en sorte que la connaissance du facteur λ permet de ramener l'intégration de l'équation proposée à une simple quadrature.

Il existe à l'égard des équations simultanées un théorème analogue : *si, en effet, on considère le système*

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} P_{11} dx_1 + P_{12} dx_2 + \ldots + P_{1n+1} dx_{n+1} = 0 \text{ ou } \Omega_1 = 0, \\ P_{21} dx_1 + P_{22} dx_2 + \ldots + P_{2n+1} dx_{n+1} = 0 \text{ ou } \Omega_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{n1} dx_1 + P_{n2} dx_2 + \ldots + P_{nn+1} dx_{n+1} = 0 \text{ ou } \Omega_n = 0, \end{array}\right.$$

P_{ij} désignant une fonction quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, il existera toujours un système de multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que l'expression $\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \ldots + \lambda_n \Omega_n$ soit une différentielle exacte.

Nous donnerons au système des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le nom de *système de multiplicateurs* des équations (1). Pour démontrer l'existence de ce système, désignons par

$$(2)\qquad F_1 = c_1,\quad F_2 = c_2,\quad \ldots,\quad F_n = c_n$$

les intégrales des équations (1) résolues par rapport aux constantes d'intégration $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si l'on diffé-

rentie ces équations (2), on aura

$$(3)\qquad dF_1 = 0,\quad dF_2 = 0,\quad \ldots,\quad dF_n = 0,$$

et ces équations devront fournir pour les rapports

$$dx_1 \div dx_2 \div \ldots \div dx_{n+1}$$

les mêmes valeurs que les équations (1). On sait en effet que, en éliminant entre les intégrales (2) et leurs différentielles les constantes d'intégration, on doit retomber sur un système équivalent à (1). Ce système équivalent est le système (3).

Or, les formules (1) et (3) fournissant les mêmes valeurs des quantités $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{n+1}$, on sait, d'après la théorie des équations linéaires, que l'une quelconque des formules (3) est de la forme

$$\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \ldots + \lambda_n \Omega_n = 0,$$

ce qui met en évidence l'existence des facteurs λ.

Il existe une infinité de systèmes de multiplicateurs. En effet, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ un tel système, et soit

$$\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \ldots + \lambda_n \Omega_n = dF_1.$$

Il est clair que, φ désignant une fonction quelconque, $\lambda_1 \varphi(F_1)$, $\lambda_2 \varphi(F_1)$, ... sera encore un système de multiplicateurs. Soient plus généralement

$$\begin{array}{cccc} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots, & \lambda_{1n}, \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots, & \lambda_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \lambda_{i1}, & \lambda_{i2}, & \ldots, & \lambda_{in} \end{array}$$

i systèmes de multiplicateurs et

$$\Sigma \lambda_{1j} \Omega_j = dF_1,\quad \Sigma \lambda_{2j} \Omega_j = dF_2,\quad \ldots\quad \Sigma \lambda_{ij} \Omega_j = dF_i;$$

il est clair que

$$\begin{gathered}\lambda_{11}\varphi_1(F_1)+\lambda_{12}\varphi_2(F_2)+\ldots+\lambda_{1n}\varphi_n(F_n),\\ \lambda_{21}\varphi_1(F_1)+\lambda_{22}\varphi_2(F_2)+\ldots+\lambda_{2n}\varphi_n(F_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

constituera, quelles que soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, un nouveau système de multiplicateurs. Mais *il n'existe que n systèmes de multiplicateurs distincts.*

En effet, il n'existe que n intégrales distinctes de la forme (3); par conséquent, si l'on appelle

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{llll}\lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots, & \lambda_{1n},\\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots, & \lambda_{2n},\\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,\\ \lambda_{n1}, & \lambda_{n2}, & \ldots, & \lambda_{nn}\end{array}\right.$$

les systèmes de multiplicateurs qui, appliqués aux équations (1), donnent lieu aux intégrales (2), toute intégrale du système (1) sera de la forme

$$\psi(F_1, F_2, \ldots, F_n) = \text{const.}$$

Tout système de multiplicateurs appliqué aux équations (1) devra donc fournir une différentielle de la forme

$$\frac{d\psi}{dF_1}dF_1 + \frac{d\psi}{dF_2}dF_2 + \ldots + \frac{d\psi}{dF_n}dF_n = 0,$$

et sera, par suite, une combinaison des multiplicateurs (4).

Pour nous en convaincre, écrivons ainsi la formule précédente

$$\frac{d\psi}{dF_1}(\lambda_{11}\Omega_1+\lambda_{12}\Omega_2+\ldots)+\frac{d\psi}{dF_2}(\lambda_{21}\Omega_1+\lambda_{22}\Omega_2+\ldots)+\ldots=0,$$

et nous reconnaissons que les multiplicateurs en question

sont

$$\frac{d\psi}{dF_1}\lambda_{11}+\frac{d\psi}{dF_2}\lambda_{21}+\ldots+\frac{d\psi}{dF_n}\lambda_{n1},$$

$$\frac{d\psi}{dF_1}\lambda_{12}+\frac{d\psi}{dF_2}\lambda_{22}+\ldots+\frac{d\psi}{dF_n}\lambda_{n2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. — Les équations différentielles proposées peuvent être remplacées par les suivantes, que l'on en déduit par l'application des multiplicateurs (4),

$$\lambda_{11}\Omega_1+\lambda_{12}\Omega_2+\ldots+\lambda_{1n}\Omega_n=0=dF_1,$$

$$\lambda_{21}\Omega_1+\lambda_{22}\Omega_2+\ldots+\lambda_{2n}\Omega_n=0=dF_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_{n1}\Omega_1+\lambda_{n2}\Omega_2+\ldots+\lambda_{nn}\Omega_n=0=dF_n,$$

et qui sont immédiatement intégrables. Ces dernières équations sont satisfaites, non seulement quand on y suppose $\Omega_1=0$, $\Omega_2=0$, ..., mais encore quand, Ω_1, Ω_2, ... cessant d'être nuls, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ont des valeurs telles que le déterminant Λ des multiplicateurs (4) soit nul; on a d'ailleurs identiquement

$$\Omega_1=\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{d\Lambda}{d\lambda_{11}}dF_1+\frac{d\Lambda}{d\lambda_{21}}dF_2+\ldots+\frac{d\Lambda}{d\lambda_{n1}}dF_n\right)\ldots,$$

de sorte que l'on peut annuler les quantités Ω soit en posant dF_1, dF_2, ... égaux à zéro, soit en posant $\frac{1}{\Lambda}$ égal à zéro ou $\Lambda=\infty$. Ainsi, *en égalant à zéro l'inverse du déterminant des systèmes de multiplicateurs, on peut obtenir une solution des équations proposées.*

Nous avons dit qu'il n'existait que n systèmes de multiplicateurs distincts. Si donc on connaissait un système de multiplicateurs distincts, le système (4) par exemple, tout nouveau système rentrerait dans celui-ci, en sorte que, $\lambda_{n+1,1}$, $\lambda_{n+1,2}$, ... désignant de nouveaux

multiplicateurs, on aurait

$$\lambda_{n+1,i} = \frac{d\psi}{dF_1}\lambda_{1i} + \frac{d\psi}{dF_2}\lambda_{2i} + \ldots + \frac{d\psi}{dF_n}\lambda_{ni}.$$

De ces équations on tire

$$\frac{d\psi}{dF_1} = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{d\Lambda}{d\lambda_{11}}\lambda_{n+1,1} + \frac{d\Lambda}{d\lambda_{21}}\lambda_{n+1,2} + \ldots\right)\ldots\ldots$$

Les fonctions $\frac{d\psi}{dF_1}$, $\frac{d\psi}{dF_2}$, ... pourront donc s'exprimer à l'aide des seules quantités λ_{ij}, et en les égalant à des constantes on exprimera que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont constants; par suite, on aura ainsi les intégrales des équations proposées.

Les équations $\frac{d\psi}{dF_1} = 0$, $\frac{d\psi}{dF_2} = 0$, ... seront distinctes, sans quoi il existerait une relation de la forme

$$f\left(\frac{d\psi}{dF_1}, \frac{d\psi}{dF_2}, \ldots, \frac{d\psi}{dF_n}\right) = 0$$

entre $F_1, F_2, \ldots, F_n$, qui ne seraient pas des fonctions distinctes.

Pour faire une application utile de la théorie précédente, considérons le système d'équations linéaires

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx} &= X_{11}x_1 + X_{12}x_2 + \ldots + X_{1n}x_n + X_{10},\\ \frac{dx_2}{dx} &= X_{21}x_1 + X_{22}x_2 + \ldots + X_{2n}x_n + X_{20},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{dx_n}{dx} &= X_{n1}x_1 + X_{n2}x_2 + \ldots + X_{nn}x_n + X_{n0}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles X_{ij} désigne en général une fonction de la seule variable x. Multiplions la première de ces équations par λ_1, la seconde par λ_2, ..., et ajoutons ; nous

aurons

$$\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots + \lambda_n dx_n$$
$$- [\lambda_1 (X_{11} x_1 + X_{12} x_2 + \ldots + X_{10}) + \ldots] dx = 0.$$

Pour que le premier membre de cette équation soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que l'on ait

$$(6) \qquad \frac{d\lambda_i}{dx_j} = \frac{d\lambda_j}{dx_i},$$

quels que soient i et j, et que

$$(7) \qquad \frac{d\lambda_i}{dx} = -\frac{d}{dx_i}[\lambda_1 (X_{11} x_1 + \ldots + X_{10}) + \ldots],$$

quel que soit i. Or il est assez facile de satisfaire à ces dernières équations en prenant pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des fonctions de la seule variable x. En effet, alors les équations (6) deviennent identiques et les équations (7) se réduisent à

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_1}{dx} = -(\lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{21} + \ldots + \lambda_n X_{n1}), \\ \dfrac{d\lambda_2}{dx} = -(\lambda_1 X_{12} + \lambda_2 X_{22} + \ldots + \lambda_n X_{n2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d\lambda_n}{dx} = -(\lambda_1 X_{1n} + \lambda_2 X_{2n} + \ldots + \lambda_n X_{nn}). \end{cases}$$

Les multiplicateurs satisfont donc aussi à un système d'équations linéaires; mais ce système est en général plus simple que le système proposé (5), puisqu'il ne renferme plus les quantités X_{10}, X_{20}, ..., que l'on appelle les seconds membres des équations proposées.

Quand on aura intégré les équations (8) sans seconds membres, de simples quadratures feront connaître les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cette manière d'intégrer en faisant usage des multiplicateurs sera généralement plus

avantageuse que la méthode connue de la variation des constantes. En effet, la méthode de la variation des constantes impose certaines quadratures au calculateur ; la méthode des multiplicateurs, au contraire, conduit à l'intégration de différentielles totales, ce qui laisse beaucoup de choix dans la manière de diriger les calculs.

Il est à remarquer que les multiplicateurs des équations (8) sont précisément les solutions des équations (5), abstraction faite des termes X_{10}, X_{20}, ..., à savoir

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} = X_{11}x_1 + X_{12}x_2 + \ldots + X_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dx} = X_{21}x_1 + X_{22}x_2 + \ldots + X_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dx} = X_{n1}x_1 + X_{n2}x_2 + \ldots + X_{nn}x_n, \end{cases}$$

en sorte que l'intégration de l'un des systèmes (8), (9) entraîne celle de l'autre système.

Il y a plus, on peut considérer simultanément les deux systèmes (8) et (9), et l'on peut toujours en déduire une intégrale; il suffit pour cela de multiplier les équations du système (8) par x_1, x_2, ..., x_n, celles du système (9) par λ_1, λ_2, ..., λ_n, et d'ajouter; on a alors

$$x_1 d\lambda_1 + \lambda_1 dx_1 + \ldots + x_n d\lambda_n + \lambda_n dx_n = 0,$$

ou

$$(10)\quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \text{const.}$$

Posons

$$H = \Sigma \lambda_i x_j X_{ij};$$

il est facile de voir que les systèmes (8) et (9) forment

un système canonique. En effet, on peut les écrire

$$\frac{dx_1}{dx}=\frac{dH}{d\lambda_1},\quad \frac{dx_2}{dx}=\frac{dH}{d\lambda_2},\quad \ldots,$$

$$\frac{d\lambda_1}{dx}=-\frac{dH}{dx_1},\quad \frac{d\lambda_2}{dx}=-\frac{dH}{dx_2},\quad \ldots.$$

Tout système d'équations linéaires peut donc se ramener à un système canonique, contenant, il est vrai, un nombre double d'équations, mais dont on connaît une solution (10).

La recherche des multiplicateurs est un peu plus facile en général que la résolution des équations proposées elles-mêmes. Supposons, en effet, le système des équations à intégrer ramené à la forme

$$(11)\qquad \frac{dx_1}{dx}=X_1,\quad \frac{dx_2}{dx}=X_2,\quad \ldots,\quad \frac{dx_n}{dx}=X_n.$$

Si l'on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ un système de multiplicateurs, on devra avoir

$$(12)\quad \begin{cases} \lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots \\ \qquad + \lambda_n dx_n - dx(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n) = \text{diff. exacte.} \end{cases}$$

Mais trouver des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ satisfaisant à cette condition, c'est intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(13)\qquad \frac{du}{dx}+X_1\frac{du}{dx_1}+\ldots+X_n\frac{du}{dx_n}=0,$$

et les dérivées $\frac{du}{dx_1}, \ldots, \frac{du}{dx_n}$ de la fonction u seront les multiplicateurs cherchés. Pour trouver un système de multiplicateurs, il n'est donc pas nécessaire d'intégrer complètement l'équation (12), équivalente aux équations (11), il suffit d'avoir seulement les dérivées relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la fonction u qui y satisfait.

On pourrait de la théorie précédente déduire la méthode connue pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. A cet effet, on raisonnera ainsi :

Intégrer l'équation (13), ou

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + X_1\lambda_1 + \ldots + X_n\lambda_n = 0,$$

dans laquelle on a posé pour simplifier $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_i} = \lambda_i$, c'est trouver des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ telles que l'équation (12) ait lieu. Or $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ne sont autre chose que les multiplicateurs des équations (11). On calculera ces multiplicateurs, si l'on veut, en intégrant ces équations (11). Soit $u =$ const. une intégrale du système (11) en question; on aura précisément

$$\lambda_1 dx_1 + \ldots + \lambda_n dx_n - dx(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n) = du,$$

d'où l'on conclura que u est précisément la fonction qui, égalée à une constante, est une intégrale de (11).

Cette manière de retrouver la règle donnée par Lagrange et confirmée par Jacobi a peut-être l'avantage d'entrer plus au cœur de la question et de mieux montrer le rôle que jouent les fonctions intégrales et leurs dérivées.

SUR UNE MÉTHODE POUR OBTENIR PAR APPROXIMATION LES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE QUI A TOUTES SES RACINES RÉELLES;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Quand on a une valeur suffisamment approchée d'une racine d'une équation, la méthode d'approxima-

tion de Newton et la méthode des parties proportionnelles fournissent toutes les deux des moyens commodes et rapides d'approcher indéfiniment de cette racine. La principale difficulté consiste à obtenir cette première valeur approchée que l'on doit prendre comme point de départ.

Je ne crois pas que, si l'on considère la question dans toute sa généralité, il y ait beaucoup à ajouter à ce que l'on sait déjà; il me semble que le problème doit être posé différemment et de la façon suivante :

Une équation étant donnée (ou, si l'on veut, un type d'équations étant donné), trouver une méthode qui conduise de la façon la plus sûre et la plus rapide aux valeurs approchées de ses racines.

La Note qui suit a pour objet de donner une solution de ce problème dans le cas où l'équation proposée est algébrique et a toutes ses racines réelles. Les équations de ce genre se présentent du reste, comme on le sait, très fréquemment dans un grand nombre de questions importantes de l'Analyse.

II.

2. Soient

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

une équation algébrique du degré n, et α, β, γ, ... ses différentes racines; on a l'identité

$$(2) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \cdots.$$

Si x est une valeur suffisamment approchée de la racine α, la quantité $\frac{1}{x-\alpha}$ qui figure dans le second membre de cette relation est très grande, tandis que les autres quantités $\frac{1}{x-\beta}$, $\frac{1}{x-\gamma}$, ... ont des valeurs beau-

coup plus petites; on aura donc sensiblement

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha},$$

et de cette formule on déduit une valeur approchée de α qui ne diffère pas, comme il est aisé de le voir, de la valeur donnée par la méthode d'approximation de Newton.

Je ne chercherai pas ici à corriger cette méthode en essayant d'obtenir une valeur approchée des termes négligés

$$\frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \ldots;$$

je prendrai plutôt comme point de départ l'équation suivante, que l'on obtient en dérivant l'identité (2) :

$$\frac{f'^2 - ff''}{f^2} = \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2} + \frac{1}{(x-\gamma)^2} + \ldots.$$

On en déduit que, α désignant une racine quelconque de l'équation (1), on a

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2} < \frac{f'^2 - ff''}{f^2}.$$

En convenant donc, pour plus de clarté, de représenter les différentes valeurs que peut prendre la variable x par des longueurs portées sur une droite à partir d'une origine fixe, on voit que, si l'on représente par un point M une valeur arbitraire attribuée à x et si l'on porte de part et d'autre du point M une longueur égale en valeur absolue à

$$\frac{f}{\sqrt{f'^2 - ff''}},$$

aucune racine de l'équation (1) ne peut se trouver entre les extrémités N et N' des segments ainsi déterminés, en sorte que les racines de cette équation seront ou supé-

rieures au nombre déterminé par le point N' ou inférieures au nombre déterminé par le point N.

3. Cette propriété n'est évidemment qu'un cas particulier d'une propriété plus générale et renfermant une constante arbitraire.

Toutes les fois, en effet, qu'une proposition relative à des polynômes entiers ne comprend pas uniquement dans son énoncé des covariants (simples ou multiples de ces polynômes), elle est un cas particulier d'une proposition plus générale, dans l'énoncé de laquelle n'entrent que des covariants, et cette proposition plus générale peut se déduire immédiatement de la proposition particulière dont je viens de parler [1].

C'est ce que je pourrais faire ici; mais, pour être mieux compris dans un premier exemple, je suivrai une autre marche et partirai de l'identité suivante, où ξ désigne une quantité arbitraire et où le signe Σ s'étend à toutes les racines de l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
\sum\left(\frac{\xi-\alpha}{x-\alpha}\right)^2 &= \sum\frac{(\xi-x+x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^2}\\
&= (\xi-x)^2\sum\frac{1}{(x-\alpha)^2}+2(\xi-x)\sum\frac{1}{x-\alpha}+n\\
&= (\xi-x)^2\frac{f'^2-ff''}{f^2}+2(\xi-x)\frac{f'}{f}+n\\
&= \frac{nf^2+2(\xi-x)ff'+(\xi-x)^2(f'^2-ff'')}{f^2}\\
&= \frac{[nf+(\xi-x)f']^2+(\xi-x)^2[(n-1)f'^2-nff'']}{nf^2}.
\end{aligned}$$

---

[1] C'est de la même façon qu'en Géométrie tout théorème dans lequel la droite de l'infini ou les ombilics du plan jouent un rôle particulier est un cas particulier d'un théorème plus général dans lequel les ombilics sont remplacés par deux points quelconques du plan. Il est du reste, comme on le sait, très facile de passer du théorème particulier

Pour transformer cette relation, j'introduirai la fonction $f(x, y)$ homogène des deux variables x et y, qui se réduit à $f(x)$ quand on y fait $y = 1$; en supposant donc que cette variable soit toujours, dans la suite des calculs, remplacée par l'unité, j'aurai

$$f(x) = f(x, y)$$

et, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$nf + (\xi - x)f' = \xi f'_x + f'_y.$$

Le polynôme $(n-1)f'^2 - nff''$ ne diffère que par un facteur purement numérique du covariant de $f(x, y)$ que l'on désigne sous le nom de *hessien*; je le représenterai par la lettre H, en sorte que la relation précédente pourra s'écrire

$$(3) \qquad \sum\left(\frac{\xi-\alpha}{x-\alpha}\right)^2 = \frac{(\xi f'_x + f'_y)^2 + (\xi - x)^2 H}{nf^2}.$$

4. En représentant par P le second membre de cette égalité (P est évidemment toujours positif, et il en est de même, comme on le sait, du covariant H), je considère les deux racines X' et X'' de l'équation

$$(4) \qquad \left(\frac{\xi - X}{x - X}\right)^2 = P,$$

que l'on peut écrire

$$P(x - X)^2 - (\xi - X)^2 = 0.$$

Si, dans le premier membre de cette équation, on remplace X par la valeur d'une racine quelconque α de l'équation (1), on obtient un résultat positif, car, en

au théorème général; j'ai le premier résolu cette question, relativement aux relations angulaires, dans ma *Note sur la théorie des foyers* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853, p. 57).

vertu de l'identité (3), on a évidemment

$$\left(\frac{\xi - \alpha}{x - \alpha}\right)^2 < P.$$

On conclut de là que *toutes les racines* de l'équation (1) sont comprises dans l'un des intervalles compris entre les nombres X' et X'' ([1]).

Si, au contraire, on remplace X par x, on obtient un résultat négatif, d'où l'on voit que celui des deux segments déterminés par les points X' et X'' qui renferme toutes les racines est celui en dehors duquel est situé le point x.

5. Supposons, pour fixer les idées, que α et β désignent deux racines consécutives de l'équation (1) (α étant $< \beta$) et que nous donnions à x une valeur arbitraire comprise entre ces deux racines ; désignons par X' et X'' les deux racines de l'équation (4), X' étant la plus petite des racines.

Il suit de ce qui précède que X' et X'' sont situés, *quelle que soit la quantité* ξ, de part et d'autre du point x, et que toutes les racines sont ou supérieures à X'' ou inférieures à X'; X' et X'' sont donc respectivement des valeurs approximatives des racines α et β plus approchées que la quantité x dont on est parti.

Plus généralement, on peut dire que :

Si l'on désigne par x une quantité prise arbitrairement dans l'intervalle compris entre deux racines consécutives α et β de l'équation (1), *et par* X' *et* X'' *les*

([1]) On peut passer de la valeur X' à la valeur X'' sans passer par l'infini, ce qui donne un premier intervalle ; le second intervalle comprend la valeur infinie de la variable ou, si l'on veut, le point situé à l'infini sur la droite dont les différents points représentent les valeurs de la variable.

deux racines de l'équation (4), *les quantités*

$$\alpha,\ X',\ x,\ X'',\ \beta$$

sont placées par ordre croissant ou décroissant de grandeur (¹), ***quelle que soit la quantité*** ξ.

En particulier, si l'on suppose $\xi = \infty$, l'équation (4) devient

$$\frac{1}{(x-X)^2} = \frac{f'^2 - ff''}{f^2},$$

et l'on retrouve la proposition que j'ai démontrée tout d'abord (n° 2).

Pour établir la proposition générale, il suffit même de la supposer démontrée dans ce cas particulier; en introduisant en effet, pour l'homogénéité, des variables Y et η égales à l'unité, l'équation (4) peut se mettre sous la forme suivante,

$$\left(\frac{\xi Y - X\eta}{xY - Xy}\right)^2 = \frac{(\xi f'_x + \eta f'_y)^2 + (\xi y - \eta x)^2 H}{n f^2},$$

où l'on voit clairement qu'elle ne renferme que des covariants de la forme $f(x, y)$. Si donc la proposition énoncée est vraie pour une valeur particulière de ξ, elle est vraie (puisque, pour emprunter le langage de la Géométrie, elle est projective) pour toute autre valeur de la même variable.

III.

6. Il résulte des considérations précédentes que, x désignant une quantité prise arbitrairement entre deux racines consécutives α et β de l'équation proposée, on peut trouver une infinité de systèmes de nombres X' et

---

(¹) Si, en particulier, on considère la plus petite racine α et la plus grande racine β de l'équation, on doit les regarder comme consécutives, l'intervalle qui les sépare comprenant la valeur infinie de la variable.

X'' jouissant de la propriété que X' soit compris dans l'intervalle αx et X'' dans l'intervalle $x\beta$.

Comme on peut donner à ξ des valeurs arbitraires, on peut rechercher quelles sont les valeurs de X' et de X'' qui se rapprocheront le plus de α et de β, et il suffit évidemment de résoudre la question dans le cas particulier où $x = \infty$; de là on passera sans difficulté au cas général.

En posant

$$f(x) = ax^n + nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} + \ldots,$$

on trouve aisément que

$$H = n^2(n-1)(b^2 - ac)x^{2(n-2)} + \ldots$$

et qu'en faisant $x = \infty$ la formule (4) devient

$$(\xi - X)^2 = \frac{n(a\xi + b)^2 + n(n-1)(b^2 - ac)}{a^2},$$

d'où l'équation suivante, qui détermine les valeurs de X,

$$\begin{aligned}(n-1)a^2\xi^2 + 2a(nb + aX)\xi \\ + n^2b^2 - n(n-1)ac - a^2X^2 = 0.\end{aligned}$$

Les valeurs extrêmes de X s'obtiendront en exprimant que cette équation a ses racines égales; elles seront ainsi déterminées par la relation

$$(nb + aX)^2 - (n-1)[n^2b^2 - n(n-1)ac - a^2X^2] = 0,$$

qui peut s'écrire, toutes réductions faites,

$$a^2X^2 + 2abX + (n-1)^2ac - n(n-2)b^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$X = \frac{-b \pm (n-1)\sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et, d'après ce que j'ai démontré plus haut, l'une de ces valeurs est une limite supérieure des racines de l'équation proposée, l'autre en est une limite inférieure ([1]).

7. Cette proposition n'est évidemment qu'un cas particulier d'une proposition plus générale relative à une valeur arbitraire de x, le cas que je viens de considérer correspondant à $x = \infty$.

Pour la trouver, je mettrai la relation précédente sous la forme

$$(5) \qquad (na\mathrm{X} + nb)^2 - n^2(n-1)^2(b^2 - ac) = 0,$$

([1]) Cette proposition peut s'établir directement de la façon suivante. En désignant par α, 6, γ, ... les racines de l'équation $f(x) = 0$, par s_1 la somme de ces racines et par s_2 la somme de leurs carrés, on a évidemment

$$\Sigma(x-\alpha)^2 = nx^2 - 2s_1x + s_2.$$

En désignant par α l'une quelconque des racines, on a donc

$$(x-\alpha)^2 < nx^2 - 2s_1x + s_2;$$

d'où l'on voit que le polynôme

$$(n-1)x^2 + 2(\alpha - s_1)x + s_2 - \alpha^2$$

a toujours une valeur positive. Ses facteurs sont donc imaginaires, et l'on a, pour toute racine de l'équation,

$$(n-1)(s_2 - \alpha^2) - (\alpha - s_1)^2 > 0;$$

par suite, l'équation

$$(n-1)(s_2 - x^2) - (x - s_1)^2 = 0$$

détermine deux limites des racines de l'équation (1).

Elle peut s'écrire

$$nx^2 - 2s_1x + s_1^2 - (n-1)s_2 = 0,$$

ou, en remplaçant respectivement s_1 et s_2 par leurs valeurs $-\dfrac{nb}{a}$ et $\dfrac{n^2b^2 - n(n-1)ac}{a^2}$,

$$a^2x^2 + 2abx + (n-1)^2ac - n(n-2)b^2 = 0;$$

c'est, sauf la notation, l'équation obtenue plus haut par une voie différente.

et je considérerai l'équation suivante,

$$(6) \qquad (\mathrm{X}f_x + \mathrm{Y}f_y)^2 - (n-1)(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x)^2\mathrm{H} = 0,$$

qui ne renferme que des covariants de $f(x, y)$.

Je remarque que, quand on y fait $x = \infty$, elle se réduit à l'équation (5); sans autre démonstration, on peut donc en conclure que :

Si l'on donne, dans l'équation (6), *à la variable x une valeur comprise entre deux racines consécutives α et β de l'équation* (1), *de ses deux racines X' et X'', l'une est comprise entre α et x et l'autre entre x et β.*

Ces quantités sont d'ailleurs, de toutes celles que l'on peut, en donnant à ξ toutes les valeurs possibles, déduire de l'équation (4), *celles qui approchent le plus des racines α et β.*

Pour résoudre l'équation (6), j'y fais, pour simplifier l'écriture, $\mathrm{Y} = y = 1$, et, après l'avoir écrit de la façon suivante,

$$[nf + (\mathrm{X} - x)f']^2 = (n-1)(\mathrm{X} - x)^2\mathrm{H},$$

j'extrais la racine carrée des deux membres.

On en déduit

$$(7) \qquad \frac{1}{\mathrm{X} - x} = \frac{-f' \pm \sqrt{(n-1)f'^2 - n(n-1)ff''}}{nf}.$$

8. La formule qui précède résout complètement la question suivante :

Étant donné un nombre arbitraire x, déterminer, sans tâtonnement et par une suite d'opérations régulières, des valeurs de plus en plus approchées de la racine immédiatement supérieure à x ou de la racine qui lui est immédiatement inférieure.

Si, par exemple, on veut déterminer la racine immé-

diatement supérieure à x, on tirera de la formule (7) une valeur convenable de la correction $X - x$, en prenant le radical (qui détermine le signe du second membre) avec un signe contraire à celui de f; en partant de cette nouvelle valeur ou, pour faciliter les substitutions, de toute autre valeur comprise entre x et X, on continuera les opérations, qui permettront ainsi d'approcher indéfiniment de la racine cherchée.

Quelle que soit la valeur x dont on parle, cette méthode n'est jamais en défaut comme peut l'être la méthode de Newton, et, dans le cas où la méthode de Newton peut être employée avec sûreté, elle donne toujours une approximation plus grande.

Supposons, pour fixer les idées, que nous appliquions la méthode de Newton au nombre x en vue d'obtenir la racine immédiatement supérieure; la correction est égale à

$$-\frac{f}{f'},$$

quantité positive, et l'on a $ff'' > 0$.

La correction proposée est égale à

$$\frac{nf}{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-2)ff''}},$$

où le radical doit avoir le même signe que f.

Or, ff'' étant positif, il est clair qu'en valeur absolue le dénominateur est plus petit que nf'; la correction proposée est donc supérieure à celle qui résulte de la formule de Newton, et, comme elle demeure également inférieure à l'excès de la racine cherchée sur le nombre x, elle est plus avantageuse.

(*A suivre.*)



SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE EN 1879 AU CONCOURS D'AGRÉGATION POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL;

Par M. Ernest LEBON,
Professeur au lycée de Versailles.

Trouver l'équation de la perspective d'une hélice, le tableau étant perpendiculaire à son axe et le point de vue S *étant sur cet axe.*

Prenons pour origine le pied s de l'axe sur le tableau; pour axes de coordonnées rectangulaires l'axe sz de l'hélice, une droite sx passant par la trace de l'hélice sur le tableau, et une droite sy perpendiculaire à sx dans le tableau. Désignons par ω l'angle avec sx de la projection d'un rayon visuel sur le tableau, par r le rayon de l'hélice, et par h son pas. Les coordonnées de S sont o, o, c.

Les équations de l'hélice sont

$$x = r\cos\omega,\quad y = r\sin\omega,\quad z = \frac{h\omega}{2\pi} = b\omega.$$

Les équations d'une génératrice du cône de sommet S, ayant l'hélice pour directrice, sont

$$\frac{x}{r\cos\omega} = \frac{y}{r\sin\omega} = \frac{z-c}{b\omega - c}.$$

L'élimination de ω entre ces équations donne l'équation du cône S. On trouve

$$(x^2+y^2)\left(b\,\mathrm{arc\,tang}\frac{y}{x} - c\right)^2 - r^2(z-c)^2 = 0.$$

L'équation de la courbe perspective cherchée est obtenue



en faisant $z = 0$ dans l'équation précédente. En remplaçant dans l'équation de la courbe perspective $x^2 + y^2$ par ρ^2 et arc tang $\frac{y}{x}$ par sa valeur ω, on trouve, le pôle étant s et l'axe polaire sx, l'équation polaire suivante de la courbe perspective :

$$[\rho(c - b\omega) + cr][\rho(c - b\omega) - cr] = 0.$$

La courbe complète est formée de deux courbes symétriques par rapport à sy, dont les équations s'obtiennent en égalant chaque facteur à zéro. Une seule de ces équations suffit, pourvu que l'on fasse varier ω de zéro à $\pm\infty$. Cette équation est celle de la courbe nommée *spirale hyperbolique*.

CONCOURS GÉNÉRAL (1879).

Mathématiques spéciales.

Étant donné un hyperboloïde à une nappe et un point P dans le plan de l'ellipse de gorge, par le point P on mène une parallèle PH à une position G de l'une des deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde, et l'on considère le cylindre de révolution ayant pour axe la droite PH et passant par la droite G. La projection sur le plan de l'ellipse de gorge de l'intersection du cylindre et de l'hyperboloïde est une courbe du troisième degré, ayant un point double: trouver le lieu de ce point double quand la droite G décrit l'hyperboloïde.

Philosophie.

I. On donne un quadrilatère ABCD : inscrire dans ce quadrilatère un trapèze isoscèle MNPQ, dont le som-

met M est donné et dont les deux côtés parallèles MN, PQ sont parallèles à la diagonale AC du quadrilatère. Pour quelles positions du point M ce trapèze se réduit-il à un triangle?

II. Donner les dénominateurs de toutes les fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en fractions décimales, donnent naissance à une fraction décimale périodique mixte, dont la période a trois chiffres et la partie non périodique deux chiffres.

Résoudre la même question quand la période a quatre chiffres et la partie non périodique un chiffre.

Mathématiques élémentaires.

I. On considère un quadrilatère ABCD dans lequel on a AB = BC et CD = DA : 1° on demande de prouver que ce quadrilatère est circonscriptible à deux cercles; 2° on déforme ce quadrilatère de telle manière que les côtés demeurent invariables et que les points A, B demeurent fixes. On demande le lieu des centres des cercles inscrits aux différentes positions du quadrilatère.

II. Étant données les deux équations

$$ax + by + cz = 0, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

en déduire les rapports $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$ par des formules ne contenant pas de radicaux au dénominateur. Chercher dans quel cas les valeurs de ces rapports sont réelles.

Rhétorique.

Soit AB une portion de droite de longueur donnée; on prend entre A et B, sur la droite AB, un point C, et, sur AC comme diamètre, on décrit une demi-circonfé-

rence ; par le point B on mène une tangente à cette demi-circonférence : soit D le point de contact, et soit E le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite AB par le point A.

Déterminer le point C de telle façon que, si l'on fait tourner la figure autour de la droite AB, la surface engendrée par l'arc de cercle AD et la surface engendrée par la portion de droite BE soient dans un rapport égal à un nombre donné m.

Indiquer les conditions de possibilité. Appliquer dans le cas particulier où m est égal à $\frac{1}{2}$, et, dans ce cas, trouver le rapport des surfaces engendrées par les deux portions BD, DE de la droite BE.

Seconde.

I. On donne deux droites parallèles RR′, SS′, et une droite perpendiculaire à ces parallèles rencontrant RR′ en A et SS′ en B. Sur RR′, à partir du point A, on porte une longueur arbitraire AA′, et sur SS′, à partir du point B, et du même côté par rapport à AB, on porte une longueur BB′ telle que le produit des longueurs AA′ et BB′ soit égal au carré de AB ; on mène les droites AB′ et BA′, et l'on désigne par M leur point de rencontre ; on mène par le point M une perpendiculaire à AB, et l'on désigne par P et par Q les points où elle rencontre les droites AB, A′B′. Enfin on désigne par C le point où la droite A′B′ rencontre la droite AB :

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand on fait varier la longueur AA′ ;

2° Démontrer que le point M est le milieu de PQ ;

3° Démontrer que la tangente au point M à la courbe que décrit ce point passe par le point C.

II. Soit a la longueur du côté d'un triangle équila-

téral ABC : calculer la distance du point A à un point M situé sur AB, entre A et B, de façon que, si l'on désigne par P et par Q les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés AC et BC du triangle, le rapport de l'aire du quadrilatère APQB à l'aire du triangle ABC soit égal à un nombre donné *m*.

Indiquer les conditions de possibilité ; appliquer en supposant *m* égal à $\frac{15}{32}$, et, dans ce cas, déterminer par une construction géométrique la position du point M.

Troisième.

I. On donne une circonférence O et une droite RS tangente à cette circonférence au point A ; on prend un diamètre quelconque BC, et des extrémités B, C de ce diamètre on abaisse les perpendiculaires BB′, CC′ sur la tangente RS ; on mène les cordes AB, AC.

Démontrer que le rapport de l'aire du triangle ABC à l'aire du trapèze BB′C′C est le même quelle que soit la direction du diamètre BC.

II. Soit I le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC ; on construit un second triangle A′B′C′ dont les sommets A′, B′ et C′ sont respectivement symétriques au point I par rapport aux droites BC, AC, AB :

1° Démontrer que les deux triangles ABC, A′B′C′ sont inscrits dans un même cercle ;

2° Évaluer les angles du triangle A′B′C′ en supposant connus les angles du triangle ABC ;

3° Désignant par M et par N les points où la droite AB rencontre les droites B′C′ et C′A′, par P et par Q les points où la droite BC rencontre les droites C′A′ et A′B′, enfin par R et par S les points où la droite CA rencontre les droites A′B′ et B′C′, démontrer que les trois droites MQ, NR, PS passent par un même point.

Dans chaque question, on examinera séparément les cas où les trois angles du triangle ABC sont aigus et le cas où l'un d'entre eux, A par exemple, est obtus.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1879.

Mathématiques spéciales.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. On considère un paraboloïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan P de la courbe de contact passe par le point A; soit M le point d'intersection de ce paraboloïde avec celui de ses diamètres qui passe par le point A; soit Q le point de rencontre du plan P avec la droite qui joint le point M au pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde.

Le plan P tournant autour du point A, on demande :

1° Le lieu du point M;

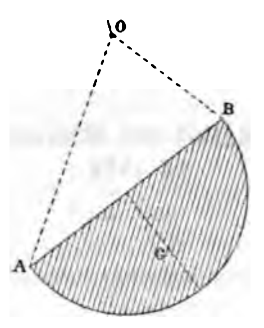
2° Le lieu du point Q : ce second lieu est une surface du second degré S que l'on discutera en faisant varier la position du point A dans l'espace;

3° Le lieu des positions que doit occuper le point A pour que la surface S soit de révolution.

Mathématiques élémentaires et Mécanique.

Une lame homogène, pesante, et d'une épaisseur infiniment petite, a la forme d'un demi-cercle ACB; elle est soutenue par un fil attaché aux extrémités du diamètre AB, et qui passe dans un anneau fixe infiniment petit O. On demande de déterminer les positions d'équilibre

de la lame et de reconnaître dans quels cas cet équilibre est stable ou instable.



On donne la longueur l du fil, le rayon R du demi-cercle ACB, et le poids P de la lame.

(On négligera le poids du fil.)

Nota. — Pour reconnaître si l'équilibre est stable ou instable, on pourra chercher pour quelles positions de la lame la distance du centre de gravité G de cette lame au plan horizontal qui passe par l'anneau O est un maximum ou un minimum.

Composition sur certaines parties du programme de la licence, désignées par l'arrêté du 21 décembre 1878.

Théorie. — Intégration de l'équation $Pp + Qq = R$, où P, Q, R désignent des fonctions données de x, de y et de z, et p, q les dérivées partielles de z par rapport à x et par rapport à y.

Application. — On donne un ellipsoïde, et, sur cette surface, deux points diamétralement opposés, A et B. On joint les points A et B à un point variable m de l'ellipsoïde. Trouver une surface S telle que le plan tangent au point M où elle est rencontrée par la droite Am soit parallèle à la droite Bm.

Trouver sur cette surface une courbe telle que la tangente en chaque point M de cette courbe et l'intersection du plan tangent à la surface en M avec le plan qui passe par ce point M et par le diamètre AB soient deux tangentes conjuguées par rapport à la surface.

Mathématiques spéciales (*Leçons*).

1° Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes (première leçon).

2° Sections circulaires des surfaces du second ordre. — Cas où la surface est rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires quelconques.

3° Application de la théorie des dérivées à l'étude des fonctions d'une seule variable. — Exemples.

4° Équation du plan tangent. — Application aux surfaces du second ordre.

5° Théorème de Rolle. — Son application à la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante.

6° Lim $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m devient infini.

7° Approximation des racines. — Méthode de Newton.

8° Plans diamétraux dans les surfaces du second ordre.

9° Transformation des équations algébriques. — Exemples.

10° Première leçon sur les séries.

11° Conditions pour qu'une surface du second ordre soit de révolution. — Exemples.

12° Tangentes et asymptotes en coordonnées polaires.

13° Théorème de Sturm.

14° Règle des signes de Descartes.

15° Étant donnée l'équation générale d'une ellipse

ou d'une hyperbole, déterminer les axes en grandeur et en position. — Étant donnée l'équation générale d'une parabole, trouver l'équation de son axe et la grandeur du paramètre.

16° Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la courbe d'intersection a des branches infinies.

17° Mener par une droite un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe.

18° Section plane de l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

19° Intersection de deux courbes du second degré. — Ramener la question à la résolution d'une équation du troisième degré.

20° Discussion de l'équation du second degré à deux variables (Géométrie analytique).

21° Étude algébrique de l'équation en S.

Mathématiques élémentaires (*Leçons*).

1° Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

2° Maximum et minimum de l'expression

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

3° Résolution des équations $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$. — Discussion.

4° Équation bicarrée. — Transformation des expressions $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ en une somme ou une différence de deux radicaux simples.

5° Étude du trinôme $ax^2 + bx + c$.

6° Conversion d'une fraction ordinaire en fractions décimales. — Fractions périodiques.

7° Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de plusieurs nombres entiers.

8° Racine carrée d'un nombre entier.

9° Division des nombres entiers.

10° Figures symétriques par rapport à un axe, par rapport à un centre, par rapport à un plan.

11° Première leçon sur la mesure des volumes.

12° Mesure des angles.

13° Volume de la sphère et du segment sphérique.

14° Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.

15° Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.

16° Parabole.

17° Aire du fuseau et du triangle sphérique.

18° Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

19° Connaissant $\sin a$ ou $\cos a$, calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$. — Connaissant $\tang a$, calculer $\tang \frac{a}{2}$.

20° Construction des Tables trigonométriques.

21° Distance d'un point à un plan, à une droite. — Plus courte distance de deux droites.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un paraboloïde hyperbolique et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, les deux surfaces ayant une génératrice commune.

La ligne de terre est parallèle au petit côté du cadre et à $0^{m},17$ au-dessus du bord supérieur.

Hyperboloïde. — L'axe est vertical, et sa projection verticale est au milieu de la feuille; sa projection horizontale O est à 115^{mm} de la ligne de terre. Le cercle de

gorge est à 80^{mm} au-dessus du plan horizontal, son rayon est 40^{mm}. La trace de l'hyperboloïde sur le plan horizontal est un cercle de rayon égal à 110^{mm}.

Paraboloïde. — Il a pour plan directeur le plan horizontal et pour directrices :

1° La génératrice ab, $a'b'$ de l'hyperboloïde, dont la trace horizontale est sur la parallèle à la ligne de terre menée par le point O, et à gauche de ce point, et dont le point de rencontre avec le cercle de gorge est derrière le plan de front mené par l'axe;

2° La verticale menée par un point O du plan horizontal situé derrière le plan de front mené par l'axe, et distant de 44^{mm} du point A et de 68^{mm} du point O.

On représente ce qui reste de l'hyperboloïde quand on enlève tout ce qui est au-dessus de la surface du paraboloïde.

Composition sur un sujet de licence.

Un point pesant M, assujetti à rester sur la surface d'un cône de révolution dont l'axe est vertical, est attiré par un centre placé au sommet S du cône : l'attraction est proportionnelle à une fonction inconnue de la distance MS.

1° Trouver quelle doit être cette fonction pour que la trajectoire du point M soit plane.

2° Étudier, dans ces conditions, le mouvement de la projection du point M sur un plan horizontal.

3° Déterminer la réaction du cône, pour une position quelconque du point M sur sa trajectoire.

Exercice de calcul.

Étant donnée l'équation

$$\begin{aligned} 4x^2 + 25y^2 + 49z^2 - 70yz - 28zx \\ + 20xy - 2x \quad 4y + 6z + \frac{1}{13} = 0, \end{aligned}$$

qui représente une surface du second ordre rapportée à des axes rectangulaires, on demande de ramener cette équation à la forme la plus simple, en choisissant de nouveaux axes rectangulaires dont on déterminera la position par rapport aux axes primitifs.

QUESTIONS DE LICENCE

(MONTPELLIER, NOVEMBRE 1879).

Analyse. — On donne un cylindre droit vertical dont la base est un cercle de centre O et de rayon a. Une courbe tracée sur ce cylindre jouit de la propriété que, M désignant un point de cette courbe et MI la tangente correspondante, la projection du rayon vecteur $OM = r$ sur cette tangente est constante et égale à une ligne donnée K. Le point M est défini par l'ordonnée verticale z et par l'angle ω que la projection horizontale OP de OM forme avec le rayon fixe OA. On propose de :

1° Trouver la relation finie qui existe entre z et ω ou, si l'on préfère, exprimer ces coordonnées en fonction d'une variable auxiliaire;

2° Trouver en fonction de z l'expression s de l'arc de la courbe;

3° Calculer l'aire cylindrique comprise entre deux génératrices données et les arcs qu'elles interceptent sur la courbe et sur le cercle de base.

Mécanique. — Mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale dont l'intensité varie en raison inverse du carré de la distance.

CORRESPONDANCE.

Mon cher Monsieur Brisse,

Le dernier numéro des *Nouvelles Annales* contient un article du P. Lecointe sur un problème qui, si je ne me trompe, a été donné autrefois par M. Chasles au Concours général. Comme le fait très justement remarquer le P. Lecointe, toutes les solutions données dans votre Recueil sont incomplètes et ne fournissent qu'une partie du lieu. Ce fait important n'avait pas échappé à plusieurs de vos lecteurs; M. Bos, notamment, m'en avait parlé, il y a déjà longtemps, et il avait étudié la courbe du quatrième ordre qu'il faut joindre à la conique pour obtenir la solution complète de la question [1].

Permettez-moi de vous donner quelques indications sur une question plus générale, que je propose depuis longtemps comme exercice à mes élèves et dont voici l'énoncé :

On considère une conique fixe (S) *et des coniques variables passant par quatre points fixes* A_1, A_2, A_3, A_4. *On mène les tangentes communes à la conique fixe* (S) *et à l'une des coniques variables, et l'on demande le lieu du point de concours de ces tangentes.*

Il est clair que, si l'on suppose deux des points A_1, A_2 sur la conique (S) et les deux autres à l'infini sur le cercle, le problème précédent coïncide avec celui qui a d'abord été proposé par M. Chasles et si souvent traité dans votre Recueil.

[1] Il y a longtemps aussi que j'ai fait résoudre la question dans mes conférences à Sainte-Barbe et étudier la courbe du quatrième ordre qui accompagne la conique. CH. B.

Voici comment on peut obtenir rapidement l'équation du lieu.

Soit

$$S = 0$$

l'équation de la conique (S), et désignons par x', y' les coordonnées d'un point du lieu. Si l'on pose

$$2P = x'\frac{dS}{dx} + y'\frac{dS}{dy} + z'\frac{dS}{dz},$$

l'équation des deux tangentes menées du point (x', y') à la conique (S) sera

$$SS' - P^2 = 0,$$

S' désignant ce que devient S quand on y substitue x', y' à x, y.

Pour tout point du lieu, il y aura une conique tangente aux deux droites précédentes et passant par les quatre points A_i. Soit

$$(1) \qquad P^2 - SS' = (mx + ny + p)^2$$

l'équation de cette conique, et désignons par x_i, y_i les coordonnées du point A_i, par S_i, P_i les résultats de la substitution de ces coordonnées à x, y dans S et dans P; on devra avoir les quatre équations

$$\pm\sqrt{P_1^2 - S_1S'} = mx_1 + ny_1 + p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\pm\sqrt{P_4^2 - S_4S'} = mx_4 + ny_4 + p.$$

En éliminant m, n, p, on est conduit à l'équation irrationnelle du lieu

$$(2)\quad \begin{cases} \pm(234)\sqrt{P_1^2 - S_1S'} \pm (134)\sqrt{S_2S' - P_2^2} \\ \pm(124)\sqrt{S_3S' - P_3^2} \pm (123)\sqrt{S_4S' - P_4^2} = 0, \end{cases}$$

(234) désignant, pour abréger, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

et (134), (124), (123) ayant des significations analogues.

L'équation (2) peut être rendue rationnelle, et elle devient alors du huitième degré; mais il est aisé de voir qu'elle contiendra S' en facteur. En effet, si l'on fait $S' = 0$ et si l'on extrait la racine de chaque radical, la somme

$$(234)P_1 - (134)P_2 + (124)P_3 - (123)P_4,$$

correspondant à l'une des combinaisons de signes que l'on peut choisir, est identiquement nulle. Le lieu est donc en réalité du sixième degré. Il est d'ailleurs très facile d'expliquer *a priori* pourquoi le facteur S' s'introduit dans l'équation par la méthode que j'indique ici.

L'étude de ce lieu, de ses points multiples, des cas dans lesquels il se décompose mériterait d'être faite avec soin et pourrait donner naissance à un petit Mémoire fort intéressant. Ainsi l'on voit tout de suite que les équations

$$S_i S' - P_i^2 = 0$$

représentent les huit tangentes menées des points A_i à la conique S et sont des tangentes triples du lieu, etc.

Je me contenterai de quelques remarques fort simples.

Toutes les fois que l'un des points A_i sera sur la conique (S), le radical correspondant $\sqrt{P_i^2 - S'S_i}$ deviendra un carré parfait et pourra être remplacé par $\pm P_i$. D'après cela, supposons que deux des points A_i, A_1, A_2 par exemple, soient sur la conique (S); l'équation du

lieu se décomposera en deux autres,

$$(234)P_1 + (134)P_2 + (124)\sqrt{P_3^2 - S_3S'} + (123)\sqrt{P_4^2 - S_4S'} = 0$$

et

$$(234)P_1 - (134)P_2 + (124)\sqrt{P_3^2 - S_3S'} + (123)\sqrt{P_4^2 - S_4S'} = 0,$$

qui conduiront à des équations rationnelles différentes représentant chacune une courbe du quatrième degré; mais la seconde contiendra S' en facteur et donnera une conique après la suppression de ce facteur. Il est d'ailleurs évident que cette conique sera tangente aux droites représentées par les équations

$$P_3^2 - S_3S' = 0, \quad P_4^2 - S_4S' = 0,$$

c'est-à-dire aux quatre tangentes menées de A_3, A_4 à la conique (S). Dans le cas particulier où A_3, A_4 sont à l'infini sur le cercle, la conique sera donc homofocale à (S).

Supposons maintenant que les trois points A_1, A_2, A_3 soient sur S. L'équation irrationnelle se décompose en quatre autres, correspondant aux combinaisons de signes

$$\begin{array}{cccc} + & + & + & \pm \\ + & + & - & \pm \\ + & - & + & \pm \\ - & + & + & \pm \end{array}$$

des quatre termes, et l'on obtiendra quatre coniques, dont l'une est la conique S.

Enfin, si les quatre points A_i sont sur (S), trois des équations précédentes représentent des droites, et la quatrième est identiquement vérifiée. Ce résultat était évident *a priori*. Il équivaut au théorème suivant, bien connu :

Si l'on considère les coniques d'un faisceau, les points de concours des tangentes communes à deux coniques du faisceau sont les côtés du triangle conjugué commun aux deux coniques.

J'ajouterai, en terminant, que les cas indiqués précédemment ne sont pas les seuls dans lesquels le lieu se décompose. Je crois avoir autrefois proposé comme exercice à vos lecteurs celui où le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ serait circonscrit à (S), par exemple où A_1, A_2, A_3, A_4 seraient les foyers de (S). Vous voyez que l'étude complète pourrait donner lieu à des propositions intéressantes.

Votre bien dévoué, G. Darboux.

Monsieur le Rédacteur,

M. Biehler a publié, dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, une Note qui a pour objet de transformer le résultant de Sylvester en celui de Bezout et de Cauchy. A la fin de son exposé, M. Biehler veut bien rappeler que, dans un travail sur l'élimination, portant la date du 15 février 1877, j'ai donné *une* méthode pour effectuer cette transformation. S'il avait tenu à être exact, il aurait dû dire que j'avais fait connaître, non pas une méthode, mais la méthode même dont il venait de se servir, et qu'il l'avait empruntée à un opuscule lithographié, placé depuis longtemps entre les mains de mes élèves.

Voici, du reste, pour l'édification du lecteur, le passage de ma brochure où est développé ce procédé de transformation :

« Prenons d'abord deux équations de même degré,

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$
$$b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0.$$

Le déterminant de Sylvester peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Multiplions ses huit lignes par les termes de mêmes rangs dans la suite

$$-b_0,\ a_0,\ -b_1,\ a_1,\ -b_2,\ a_2,\ -b_3,\ a_3;$$

faisons dans chaque colonne la somme des produits pour la substituer à l'élément correspondant de la deuxième ligne. Les éléments des quatre premières colonnes se détruisent et, en représentant par $(a_p b_q)$ les binômes tels que $(a_p b_q - b_p a_q)$, nous obtenons pour la nouvelle ligne (2)

$$(2')\qquad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ (a_0 b_4),\ (a_1 b_4),\ (a_2 b_4),\ (a_3 b_4).$$

» Dans le nouveau déterminant, faisons abstraction des deux premières lignes et répétons sur les six autres l'opération qui vient d'être faite sur les huit premières, en commençant toujours par le facteur $(-b_0)$. Il vient pour la nouvelle ligne (4)

$$(4')\quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ (a_0 b_3),\ [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)],\ [(a_1 b_4) + (a_2 b_3)],\ (a_2 b_4).$$

» Laissons de côté les quatre premières lignes et répétons encore la même opération sur les quatre suivantes. La nouvelle ligne (6) sera

$$(6')\quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ (a_0 b_2),\ [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)],\ [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)],\ (a_1 b_4).$$

» Négligeons les six premières lignes et opérons comme précédemment sur les deux dernières; nous aurons pour la nouvelle ligne (8)

(8′) o, o, o, o, $(a_0 b_1)$, $(a_0 b_2)$, $(a_0 b_3)$, $(a_0 b_4)$.

» Écrivons au-dessous de toutes les lignes en (a) les quatre nouvelles lignes dans l'ordre inverse, savoir : (8′), (6′), (4′), (2′); nous obtenons un déterminant dont les quatre premières lignes sont

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

» Développant et ordonnant ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, ainsi que les mineurs qui correspondent à l'élément a_0, on voit qu'il se réduit à a_0^4 multiplié par le déterminant du quatrième ordre formé par les quatre dernières colonnes des lignes (8′), (6′), (4′), (2′). Mais, dans les opérations effectuées précédemment, il est visible que nous avons multiplié le déterminant par a_0^4; il faut donc supprimer ce facteur, et par suite le déterminant de Sylvester est transformé dans le suivant, qui est précisément celui de Bezout et Cauchy :

$$\begin{vmatrix} (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) & (a_0 b_4) \\ (a_0 b_2) & [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)] & [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)] & (a_1 b_4) \\ (a_0 b_3) & [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)] & [(a_1 b_4) + (a_2 b_3)] & (a_2 b_4) \\ (a_0 b_4) & (a_1 b_4) & (a_2 b_4) & (a_3 b_4) \end{vmatrix}.$$

» Passons au cas où les deux équations proposées ont des degrés différents. Soit, par exemple, le système

$$A = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$
$$B = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0.$$

» Le déterminant de Sylvester, écrit comme précédemment, est

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

» Laissons de côté les deux dernières lignes et appliquons aux quatre premières la transformation faite dans le cas précédent. Il vient ainsi, en écrivant au-dessous des deux nouvelles lignes celles que nous avions omises,

$$\begin{vmatrix} (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & -b_0 a_3 & -b_0 a_4 \\ (a_0 b_2) & [-b_0 a_3 + (a_1 b_2)] & [-b_0 a_4 - b_1 a_3] & -b_1 a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}. »$$

Tel est le procédé de transformation ou d'abaissement que j'enseignais dès 1877 au lycée Fontanes. Pour en montrer la généralité à mes élèves, j'ajoutais simplement (et ils l'auraient ajouté d'eux-mêmes) : S'il s'agissait de deux équations de degré m, il faudrait répéter m fois l'opération que nous venons de faire quatre fois dans le premier exemple, et pour deux équations des degrés m et $n < m$, on laisserait de côté les $(m - n)$ dernières lignes du résultant, puis l'on transformerait les $2n$ premières comme dans le cas précédent. Peut-on dire, après cela, comme le prétend M. Biehler, que je n'ai pas assez mis en évidence la généralité et le principe de la méthode? Ce double grief soutient-il l'examen?

Ma dignité exigeait que tous les éléments de comparaison fussent placés sous les yeux des lecteurs; je serai

satisfait lorsqu'ils se seront prononcés en connaissance de cause sur les droits de chacun et sur ses procédés.

VENTÉJOL.

Nous avons reçu trop tard, pour les mentionner en temps opportun, les solutions des questions suivantes : 1286, par M. F. Pisani ; 1234 et 1289, par M. E. Fauquembergue ; 1311, par MM. Fauquembergue et Barisien ; 1315, par MM. Barisien, A. Boilleau et Choudadow, à Stawropol (Caucase) ; 1316, par M. V. Habbé ; et 1325, par M. J. de Virieu.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

---

1. LETTERA INEDITA DI CARLO FEDERICO GAUSS A SOFIA GERMAIN, pubblicata da *B. Boncompagni*. — Firenze, calcografia e autografia Achille Paris.

2. MÉTHODES ET THÉORIES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES, avec application à plus de 400 problèmes ; par *Julius Petersen*. Traduit par *O. Chemin*, Ingénieur des Ponts et Chaussées. — Paris, Gauthier-Villars, 1880.

3. AXONOMETRIA O PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA. Sistema general de representacion geométrica que comprende, como casos particulares, las perspectivas caballera y militar, la proyeccion isográfica y otros varios ; por don *Eduardo Torroja*, catedrático de Geometria descriptiva en la Universidad de Madrid. Seccion primera. Madrid, imprenta de Fortanet, 187[illegible].

4. REMARQUES SUR LES FRACTIONS PÉRIODIQUES ; par M. *C.-A. Laisant*. — Bordeaux, G. Gounouilhou. 18[illegible].

SUR UNE MÉTHODE POUR OBTENIR PAR APPROXIMATION LES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE QUI A TOUTES SES RACINES RÉELLES;

PAR M. LAGUERRE.

[SUITE (¹).]

IV.

9. Pour éclaircir, par quelques exemples, les considérations qui précèdent, je considère d'abord l'équation

$$f = x^3 + 3x^2 - 17x + 5,$$

et je me propose de calculer la racine immédiatement supérieure à 2.

L'équation étant du troisième degré, la formule de correction est

$$\frac{1}{X - x} = \frac{-f' + \sqrt{4f'^2 - 6ff''}}{3f}.$$

On trouve aisément les valeurs suivantes,

$$f = -9, \quad f' = 7, \quad f'' = 18,$$

d'où l'on déduit

$$X - 2 = \frac{27}{7 + \sqrt{1168}} = 0,655,$$

et la valeur approchée $X = 2,655$; la véritable valeur étant avec trois décimales exactes 2,669, l'erreur est plus petite que $\frac{1}{50}$.

La méthode de Newton est ici inapplicable et conduit

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 161.

à la valeur

$$2 + \frac{9}{7} = 3,28\ldots.$$

10. Je considérerai l'équation

$$x^3 - 7x - 7 = 0,$$

en me proposant de calculer sa plus grande racine.

On peut, comme je l'ai montré plus haut (n° 6), prendre pour limites des racines les quantités

$$\frac{-b \pm (n-1)\sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Dans le cas actuel, on a $n = 3$, $a = 1$, $b = 0$ et $c = -\frac{7}{3}$; on en déduit les deux limites

$$\pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

La plus grande racine est donc inférieure à

$$2\sqrt{\frac{7}{3}} = 3,055\ldots.$$

Pour abréger les calculs, je substituerai immédiatement le nombre 3,05; si, en effet, il était trop faible, la suite des calculs l'indiquerait en amenant une correction positive.

On a

$$f = 0,022625, \quad f' = 20,9075, \quad f'' = 18,3,$$

d'où

$$X = 3,05 - \frac{0,067875}{20,9075 + \sqrt{1745,655}} = 3,048954\ldots,$$

valeur dont les cinq premières décimales sont exactes et qui est approchée par excès.

11. Soit encore l'équation $X_n = 0$ qui définit le polynôme de Legendre du degré n; on sait que les racines de cette équation sont toutes réelles et comprises entre -1 et $+1$.

Proposons de trouver une valeur approchée de la plus grande racine de cette équation; en la désignant par α et en prenant $+1$ comme point de départ, on trouve aisément

$$X_n(1) = 1, \quad X'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$X''_n(1) = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{8};$$

la formule (7) donne

$$\frac{1}{\alpha - 1} = -\frac{\frac{n(n+1)}{2} - \sqrt{\frac{(n-1)^2 n^2 (n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2(n+1)(n+2)}{8}}}{n}$$

$$= -\frac{n+1+(n-1)\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}}{2},$$

d'où

$$\alpha = 1 - \frac{2}{n+1+(n-1)\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}}.$$

La quantité α est approchée par excès. Si, comme exemple, nous faisons $n = 7$, il vient

$$\alpha = 1 - \frac{1}{4 + 6\sqrt{7}} = 0{,}9496\ldots;$$

la valeur de la racine, calculée avec quatre décimales, est, d'après Gauss [1],

$$0{,}9491.$$

---

[1] *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (*Œuvres de Gauss*, t. III, p. 195).

Si l'on employait la correction de Newton, on trouverait pour valeur approchée

$$\alpha = 1 - \frac{1}{28} = 0,9643\ldots;$$

on voit qu'elle s'éloigne notablement de la véritable valeur.

V.

12. Un autre exemple plus intéressant est fourni par l'équation du degré n qui détermine $\cos\frac{\pi}{2n}$.

Cette quantité est la plus grande racine de l'équation

$$f(x) = 1 - \frac{n}{1}\frac{n}{1}(1-x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n(n+1)}{1.3}(1-x)^2$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{n(n+1)(n+2)}{1.3.5}(1-x)^3 + \ldots = 0.$$

Cherchons-en une valeur approchée α, en prenant l'unité pour point de départ.

On a

$$f(1) = 1,\quad f'(1) = n^2,\quad f''(1) = \frac{n^2(n^2-1)}{3}.$$

La formule (7) donne donc

$$\frac{1}{\alpha - 1} = -\frac{n^2 + \sqrt{n^4(n-1)^2 - \frac{n^3(n-1)^2(n+1)}{3}}}{n}$$
$$= -\left[n + (n-1)\sqrt{\frac{2n^2-n}{3}}\right]$$

et enfin

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n + (n-1)\sqrt{\frac{2n^2-n}{3}}}.$$

On a donc approximativement

$$\cos\frac{\pi}{2n} = 1 - \frac{1}{n + (n-1)\sqrt{\frac{2n^2 - n}{3}}},$$

ou, en posant $x = \frac{1}{n}$,

$$(8) \qquad \cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{x^2}{x + (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{3}}}.$$

13. Cette formule approximative n'est justifiée que si $\frac{1}{x}$ est un nombre entier égal ou supérieur à 2. On peut cependant l'employer pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $+1$.

Pour donner une idée de l'approximation qu'elle comporte, je transcris ici, pour un certain nombre d'arcs, les valeurs des cosinus correspondants calculés au moyen de la formule (8), et en regard leurs véritables valeurs. Dans celles qui sont exprimées en décimales, les quatre premiers chiffres décimaux sont exacts.

Angles.	Valeur du cosinus calculée par la formule (8).	Valeur exacte du cosinus.
0°	1	1
18........	0,9512	0,9511
30........	0,8662	0,8660
45........	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
54........	0,5878	0,5878
60........	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
75........	0,2591	0,2588
90........	0	0

Je ferai remarquer que, quand l'angle est compris entre 0° et 45° ou entre 60° et 90°, la valeur calculée est supérieure à la valeur exacte ; elle lui est inférieure quand l'angle est compris entre 45° et 60°.

Si l'on pose

$$\cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{Vx^2}{x + (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{3}}},$$

la fonction V diffère très peu de l'unité quand x varie de 0 à $+1$. Elle s'en écarte le plus pour $x = 0$; on a alors, comme il est facile de le voir,

$$V = \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}} = 1,00731\ldots.$$

Le maximum de l'erreur commise en employant la formule (8) est environ 0,0003.

VI.

14. La méthode que j'ai exposée ci-dessus présente des avantages incontestables sur celle de Newton ; toutefois, elle exige l'extraction d'une racine carrée et la substitution dans le polynôme $f''(x)$ de la valeur approchée de la racine.

L'extraction de la racine carrée n'augmente guère les calculs lorsque l'on peut employer les logarithmes. Quant à la substitution dans la dérivée seconde, il est facile, dans un très grand nombre de cas, d'en obtenir le résultat.

Il existe en effet une classe nombreuse d'équations, ayant toutes leurs racines réelles, qui jouent un rôle important en Analyse [à cette classe appartiennent notamment les polynômes de Legendre, les polynômes définis

par l'expression $\cos n(\operatorname{arc}\cos x)$, etc.] et qui jouissent des propriétés suivantes :

En premier lieu, en désignant par V_n le polynôme qui forme le premier membre d'une de ces équations et par n son degré, V_n s'exprime linéairement en fonction de V_{n-1} et de V_{n-2}.

En second lieu, V'_n et V''_n s'expriment d'une façon très simple quand on connaît V_n et V_{n-1}.

Pour trouver le résultat de la substitution d'un nombre donné α dans V_n, on calculera successivement et par voie récurrente le résultat qu'on obtient en effectuant la substitution dans $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n$; cela posé, les valeurs de $V'_n(\alpha)$ et $V''_n(\alpha)$ s'en déduisent presque sans calcul.

VII.

15. J'ai montré précédemment qu'on pouvait obtenir une infinité d'intervalles ne renfermant aucune racine d'une équation donnée qui a toutes ses racines réelles.

On peut déterminer également une infinité d'intervalles renfermant au moins une racine d'une telle équation.

Pour abréger, je dirai que deux nombres A et A' séparent les racines d'une équation lorsque *chacun des intervalles* compris entre ces nombres renferme au moins une racine, et qu'ils ne les séparent pas lorsque l'un des intervalles renferme toutes les racines tandis que l'autre n'en renferme aucune.

Cela posé, j'ai donné sans démonstration [1] la proposition suivante :

Si l'on désigne par x une quantité réelle arbitraire,

---

[1] *Sur la résolution des équations qui ont toutes leurs racines réelles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIX, p. 996).

les nombres ξ *et* ξ' *qui satisfont à la relation*

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &(\xi - x)(\xi' - x)(f'^2 - ff'') \\ &\quad + (\xi + \xi' - 2x)ff' + nf^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

et dont l'un est arbitraire séparent les racines de l'équation

$$f(X) = 0.$$

Le nombre n désigne ici, comme ci-dessus, le degré du polynôme $f(X)$.

16. Pour démontrer ce théorème, je remarque d'abord que, en désignant par y, η et η' des quantités introduites pour rendre les expressions homogènes et dont la valeur soit égale à l'unité, la relation précédente devient

$$(\xi f'_x + \eta f'_y)(\xi' f'_x + \eta' f'_y) + (\xi y - x\eta)(\xi' y - x\eta')H = 0,$$

H représentant, comme plus haut, le covariant

$$(n-1)f'^2 - nff''.$$

La relation, sous cette nouvelle forme, ne renfermant que des covariants de $f(X, Y)$, la propriété énoncée est *projective;* il suffit donc, pour l'établir, de la démontrer pour deux valeurs particulières des variables indépendantes x et ξ'.

Je supposerai $x = \infty$ et $\xi' = 0$.

L'équation (9) devient alors, si l'on fait

$$f(X) = aX^n + nbX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}cX^{n-2} + \ldots,$$

$$ab\xi = (n-1)ac - nb^2,$$

d'où

$$\xi = (n-1)\frac{c}{b} - n\frac{b}{a},$$

et, en désignant par α, β, ..., ω les racines de $f = 0$,

$$\xi = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \omega^2}{\alpha + \beta + \ldots + \omega}.$$

Il faut maintenant prouver qu'une racine au moins de l'équation est comprise entre o et ξ et que toutes les racines ne sont pas comprises dans cet intervalle.

Pour fixer les idées, je supposerai ξ positif et je distinguerai deux cas :

1° Si toutes les racines sont positives, ξ est une valeur moyenne entre les quantités

$$\frac{\alpha^2}{\alpha}, \frac{\beta^2}{\beta}, \ldots, \frac{\omega^2}{\omega},$$

c'est-à-dire

$$\alpha, \beta, \ldots, \omega;$$

il en résulte qu'une au moins de ces racines est comprise entre o et ξ et une au moins en dehors de ces limites.

La proposition est donc démontrée.

2° Si quelques racines sont négatives, soient

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$$

les racines positives de l'équation; on a évidemment

$$\xi > \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \lambda^2}{\alpha + \beta + \ldots + \lambda}.$$

La quantité ξ étant supérieure à la valeur moyenne des racines positives, l'une au moins de ces racines est comprise dans l'intervalle o, ξ; toutes ces racines peuvent même y être comprises, mais il y a au moins une racine négative en dehors de cet intervalle.

La proposition subsiste donc encore dans ce cas.

17. Il résulte de ce qui précède que, si les quantités ξ et ξ' ne séparent pas les racines de l'équation $f = 0$, l'équation (9) a toutes ses racines imaginaires, et que, si elles les séparent, cette même équation a nécessairement des racines réelles. Mais je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet; quant aux applications que l'on peut faire

de ce qui précède à la résolution par approximation d'une équation ayant toutes ses racines réelles, je renverrai à la Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et que j'ai rappelée plus haut.

SUR UN PROCÉDÉ D'ÉLIMINATION;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Soient deux équations de même degré

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$
$$\varphi(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m = 0.$$

Formons la série des polynômes $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{m-1}(x)$, $F_m(x)$, savoir :

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x) = A_0 \varphi(x) - B_0 f(x) \\ \text{ou bien} \\ F_1(x) = G_{1,1} x^{m-1} + G_{1,2} x^{m-2} + \ldots + G_{1,m}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_2(x) = A_0 x F_1(x) - G_{1,1} f(x), \\ \text{ou} \\ F_2(x) = G_{2,1} x^{m-1} + G_{2,2} x^{m-2} + \ldots + G_{2,m}, \end{array}\right.$$

. . . . ,

$$\left\{\begin{array}{l} F_{m-1}(x) = A_0 x F_{m-2}(x) - G_{m-2,1} f(x) \\ \text{ou} \\ F_{m-1}(x) = G_{m-1,1} x^{m-1} + G_{m-1,2} x^{m-2} + \ldots + G_{m-1,m}, \end{array}\right.$$

et enfin

$$\left\{\begin{array}{l} F_m(x) = A_0 x F_{m-1}(x) - G_{m-1,1} f(x) \\ \text{ou} \\ F_m(x) = G_{m,1} x^{m-1} + G_{m,2} x^{m-2} + \ldots + G_{m,m}. \end{array}\right.$$

Cela posé, si $f(x)=0$ et $\varphi(x)=0$ ont une racine commune, cette racine est aussi commune aux équations

$$F_1(x)=0,\quad F_2(x)=0,\quad \ldots,\quad F_{m-1}(x)=0,\quad F_m(x)=0.$$

On en conclut que le déterminant Δ des coefficients de ces m équations, considérées comme linéaires en x^{m-1}, x^{m-2}, $\ldots$, x, x^0 est nul.

Nous allons démontrer que la condition $\Delta=0$ est aussi la condition suffisante pour que les équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ aient une racine commune.

Pour le faire voir, exprimons d'abord le polynôme $F_\mu(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $\varphi(x)$.

A cet effet, considérons les égalités

$$\begin{aligned}
F_\mu(x) &= A_0 x F_{\mu-1}(x) - G_{\mu-1,1} f(x),\\
F_{\mu-1}(x) &= A_0 x F_{\mu-2}(x) - G_{\mu-2,1} f(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F_2(x) &= A_0 x F_1(x) - G_{1,1} f(x),\\
F_1(x) &= A_0 \varphi(x) - B_0 f(x).
\end{aligned}$$

Si l'on élimine $F_{\mu-1}(x)$, $F_{\mu-2}(x)$, $\ldots$, $F_1(x)$ entre ces μ équations, en multipliant la première par 1, la deuxième par $A_0 x$, la troisième par $A_0^2 x^2$, etc., et la dernière par $A_0^{\mu-1} x^{\mu-1}$ et en ajoutant, il viendra

$$F_\mu(x) = A_0^\mu x^{\mu-1}\varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x),$$

$\varphi_{\mu-1}$ étant le polynôme de degré $\mu-1$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mu-1} = G_{\mu-1,1} &+ G_{\mu-2,1} A_0 x + G_{\mu-3,1} A_0^2 x^2 + \ldots\\
&+ G_{1,1} A_0^{\mu-2} x^{\mu-2} + B_0 A_\mu^{-1} x^{\mu-1}.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix}
G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m}\\
G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m}
\end{vmatrix}.$$

Ce déterminant Δ est identique à celui qu'on obtient en remplaçant dans Δ les éléments de la dernière colonne par $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x)$, quantités que l'on obtient en multipliant les éléments des diverses colonnes de Δ par $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x^0$ et en ajoutant par rangées les éléments ainsi modifiés. On a donc identiquement

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-1} & F_1(x) \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-1} & F_2(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m-1} & F_m(x) \end{vmatrix},$$

et, en vertu de l'égalité

$$F_\mu(x) = A_0^\mu x^{\mu-1} \varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x),$$

le déterminant Δ pourra s'écrire

$$\Delta = U\varphi(x) - Vf(x),$$

en posant

$$U = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-1} & A_0^1 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-1} & A_0^2 x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m-1} & A_0^m x^{m-1} \end{vmatrix}$$

et

$$V = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-1} & B_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-1} & \varphi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m-1} & \varphi_{m-1} \end{vmatrix}.$$

Les polynômes U et V sont donc de degré $m-1$.

L'identité

$$\Delta = U\varphi(x) - Vf(x)$$

montre que, si $\Delta = 0$, les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont au moins une racine commune. Par suite, $\Delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations proposées aient une racine commune.

2. Si l'équation $\varphi(x) = 0$ n'était que de degré $m - 1$, il suffirait de prendre pour $F_1(x)$ le polynôme $\varphi(x)$ lui-même, et, si $\varphi(x)$ était de degré p, p étant plus grand que m, on appliquerait le procédé précédent aux équations $f(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, $\psi(x)$ étant le reste de la division de $\varphi(x)$ par $f(x)$.

Comme application de la méthode, formons l'équation qui donne les puissances n des racines d'une équation proposée $f(x) = 0$ de degré m.

Il faudra éliminer pour cela x entre les deux équations

$$f(x) = 0,$$
$$x^n - y = 0.$$

Supposons $m > n$; l'équation $f(x) = 0$ pourra s'écrire

$$\varphi_0(x^n) + x\varphi_1(x^n) + x^2\varphi_2(x^n) + \ldots + x^{n-1}\varphi_{n-1}(x^n) = 0$$

ou

$$\varphi_0(y) + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots + x^{n-1}\varphi_{n-1}(y) = 0;$$

par suite, il faudra éliminer x entre les équations

$$x^{n-1}\varphi_{n-1}(y) + x^{n-2}\varphi_{n-2}(y) + \ldots + x\varphi_1(y) + \varphi_0(y) = 0,$$
$$x^n - y = 0.$$

Les équations $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$, ..., $F_m(x) = 0$ sont, dans ce cas,

$$x^{n-1}\varphi_{n-1}(y) + x^{n-2}\varphi_{n-2}(y) + \ldots + x\varphi_1(y) + \varphi_0(y) = 0,$$
$$x^{n-1}\varphi_{n-2}(y) + x^{n-2}\varphi_{n-3}(y) + \ldots + x\varphi_0(y) + y\varphi_{n-1}(y) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x^{n-1}\varphi_0(y) + x^{n-2}y\varphi_{n-1}(y) + \ldots + xy\varphi_2(y) + y\varphi_1(y) = 0.$$

Par suite, l'équation en y est

$$\begin{vmatrix} \varphi_{n-1}(y) & \varphi_{n-2}(y) & \ldots & \varphi_1(y) & \varphi_0(y) \\ \varphi_{n-2}(y) & \varphi_{n-3}(y) & \ldots & \varphi_0(y) & y\varphi_{n-1}(y) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_0(y) & y\varphi_{n-1}(y) & \ldots & y\varphi_2(y) & y\varphi_1(y) \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas où $n = m$ et

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

l'équation en y devient

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{m-1} & A_m + A_0 y \\ A_2 & A_3 & \ldots & A_m + A_0 y & A_1 y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m + A_0 y & A_1 y & \ldots & A_{m-2} y & A_{m-1} y \end{vmatrix} = 0.$$

SUR LES CAS GÉNÉRAUX D'IMPOSSIBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^3 + y^3 = Az^3$;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Nous avons démontré (1), d'après M. Sylvester, que, si l'on désigne par p et q deux nombres premiers des formes $18n + 5$ et $18n + 11$, l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3$$

est impossible pour les six valeurs générales de A qui suivent :

$$p, \; 2p, \; 4p^2, \; q^2, \; 2q^2, \; 4q.$$

A ces valeurs on doit ajouter les six valeurs générales

$$p^2, \; q, \; 9p, \; 9p^2, \; 9q, \; 9q^2,$$

qui ont été indiquées par le P. Pépin. Nous allons faire voir que la méthode de Fermat, par la décomposition en facteurs, permet encore de démontrer l'impossibilité pour les six valeurs de A; mais, pour abréger, nous renverrons le lecteur à l'article que nous venons de mention-

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 507 et suiv.

ner pour les notations et l'ensemble des démonstrations.

Posons $A = 3^\lambda B$; λ sera égal à 2 ou à 0, et B divisé par 9 donnera pour reste l'un des nombres ± 2, ± 4. Nous aurons alors quatre cas à considérer dans la décomposition

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2):$$

I. $x+y$ divisible par 6;
II. $x+y$ divisible par 3, et non par 2;
III. $x+y$ divisible par 2, et non par 3;
IV. $x+y$ non divisible par 2 et par 3.

Les deux derniers cas ne se présentent que pour $\lambda = 0$; d'ailleurs, $x+y$ sera nécessairement divisible par B (*loc. cit.*, p. 510, ligne 7).

Premier cas : *$x+y$ divisible par 6.* — Alors on a

$$x + y = 2^3 . 3^{\lambda-1} B a^3, \quad b^3 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2,$$
$$z = 2ab;$$

par conséquent, l'identification donne

$$G = \frac{x+y}{6} = 2^2 . 3^{\lambda-2} B a^3,$$

c'est-à-dire

$$g(f^2 - g^2) = 2^2 . 3^{\lambda-3} B a^3.$$

Pour $\lambda = 0$, a est divisible par 3, et, en posant

$$a = 3a',$$

on a

$$g(f^2 - g^2) = 4 B a'^3,$$

d'où l'on tire

$$g = 4B\alpha^3, \quad f \pm g = \beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3,$$

ou bien

$$g = 4\alpha^3, \quad f \pm g = B\beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3.$$

Ces deux décompositions donnent

$$\beta^3 - \gamma^3 = B(2\alpha)^3 \quad \text{ou} \quad B\beta^3 - \gamma^3 = (2\alpha)^3;$$

par conséquent, on ramène l'équation proposée à une autre semblable, en moindres nombres, dans laquelle z pair contient un facteur 3 en moins, ce qui conduit au troisième cas, ou dans laquelle z est impair, ce qui conduit au deuxième cas.

De même, pour $\lambda = 2$, on ramène l'équation à une autre en moindres nombres ou à l'équation

$$\beta^3 - 9\gamma^3 = B\alpha^3,$$

qui est impossible suivant le module 9.

Deuxième cas : $x+y$ *divisible par* 3, *et non par* 2. — Alors on a

$$x+y = 3^{\lambda-1}Ba^3, \quad (x-y)^2 + 3\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = 4b^3,$$
$$z = ab;$$

par conséquent, l'identification donne

$$F + G = \frac{x+y}{3} = 3^{\lambda-2}Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) \pm 3g(f^2 - g^2) = 3^{\lambda-2}Ba^3.$$

Mais $g(f^2 - g^2)$ est nécessairement divisible par 3, puisque f ne peut l'être ; donc l'équation précédente est toujours impossible suivant le module 9.

L'impossibilité se trouve donc démontrée pour les quatre valeurs

$$9p, \ 9p^2, \ 9q, \ 9q^2.$$

Troisième cas : $x+y$ *divisible par* 2, *et non par* 3. — Alors on a

$$x+y = 2^3Ba^3, \quad 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = b^3, \quad z = 2ab;$$

par conséquent, l'identification donne

$$F = \frac{x+y}{2} = 4Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) = 4Ba^3.$$

On est ainsi ramené aux deux équations de même forme

$$\beta^3 + \gamma^3 = B(2\alpha)^3 \quad \text{et} \quad B\beta^3 + \gamma^3 = (2\alpha)^3.$$

La première est une équation en moindres nombres qui correspond au troisième cas; la seconde est une équation dans laquelle z est impair et non divisible par 3, ce qui correspond au quatrième cas.

Quatrième cas : *$x+y$ non divisible ni par 2 ni par 3.* — L'identification donne

$$F \mp 3G = Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) \pm 9g(f^2 - g^2) = Ba^3;$$

cette équation est impossible suivant le module 9.

Ainsi, en résumé, les équations

$$x^3 + y^3 = Az^3 \quad \text{et} \quad xy(x+y) = Az^3$$

sont impossibles à résoudre en nombres entiers pour les douze valeurs de A :

$$p,\ p^2,\ q,\ q^2,\ 9p,\ 9p^2,\ 9q,\ 9q^2,\ 2p,\ 4p^2,\ 2q^2,\ 4q.$$

Les théorèmes précédents ne concernent que l'impossibilité pour les facteurs p ou q de la forme $6n+5$; mais il existe un grand nombre d'autres théorèmes généraux d'impossibilité pour les nombres r, s, t des formes respectives $18n+1$, $18n+13$, $18n+17$. Ces nombres appartiennent à la forme linéaire $6n+1$ et à la forme quadratique $L^2 + 3M^2$. On a, par exemple, les théorèmes suivants, dont nous nous réservons la démons-

tration et qui concernent les nombres r, s, t, pour lesquels le nombre M correspondant de la forme quadratique n'est pas un multiple de 3. Ces nombres sont compris dans le Tableau suivant :

Nombres premiers.	Forme lineaire.	Forme quadratique.
r ou r^2.....	$18n - 1$	$(9h \pm 4)^2 - 3(9k \pm 4)^2$
		$(9h \pm 4)^2 - 3(9k \pm 1)^2$
		$(9h \pm 4)^2 - 3(9k \pm 2)^2$
s ou t^2.....	$18n - 7$	$(9h \pm 2)^2 - 3(9k \pm 2)^2$
		$(9h \pm 2)^2 - 3(9k \pm 4)^2$
		$(9h \pm 2)^2 - 3(9k \pm 1)^2$
t ou s^2.....	$18n + 13$	$(9h \pm 1)^2 + 3(9k \pm 1)^2$
		$(9h \pm 1)^2 + 3(9k \pm 2)^2$
		$(9h \pm 1)^2 - 3(9k \pm 4)^2$

Cela posé, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Les équations* $x^3 + y^3 = Az^3$ *et* $xy(x + y) = Az^3$ *sont impossibles à résoudre en nombres entiers pour les huit valeurs suivantes de* A :

$$2r,\ 2r^2,\ 2s,\ 2t^2,\ 4r,\ 4r^2,\ 4t,\ 4s^2.$$

On peut assez facilement trouver des séries indéfinies de théorèmes analogues conduisant à l'*impossibilité*.

On peut aussi obtenir des séries indéfinies de théorèmes conduisant à la *résolution complète*; mais, dans ce but, il faut employer les résultats dus à M. Sylvester dans son importante théorie de la *résiduation*. On a, par exemple, le théorème suivant :

Théorème. — *On peut résoudre complètement les équations* $x^3 + y^3 = Az^3$ et $xy(x + y) = Az^3$ *par la combinaison des formules*

$$f(x, y, z) = 0,\quad x\frac{df}{dx_1} + y\frac{df}{dy_1} + z\frac{df}{dz_1} = 0$$

et des formules

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$x(y_1 z_2 - y_2 z_1) + y(z_1 x_2 - z_2 x_1) + z(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

qui donnent une nouvelle solution au moyen d'une ou de deux premières solutions, pour les valeurs suivantes de A :

1° *Lorsque* A *est un nombre premier* $18n + 13$ *ou le carré d'un nombre premier* $18n + 7$;

2° *Lorsque* A *est le double d'un nombre premier* $18n + 13$ *ou le double du carré d'un nombre premier* $18n + 7$, *à la condition que, dans la forme quadratique correspondante* $L^2 + 3M^2$, *le nombre* M *ne soit pas divisible par* 3 ;

3° *Lorsque* A *est le quadruple d'un nombre premier* $18n + 7$, *ou le quadruple du carré d'un nombre premier* $18n + 13$, *avec la même condition que précédemment.*

On a d'ailleurs, pour les nombres de la forme $L^2 + 3M^2$, les identités suivantes :

$$(3M + L)^3 + (3M - L)^3 = 2^\lambda 3^\mu (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec $M = 2^{\lambda-1} 3^{\mu-2} a^3$;

$$(2L)^3 + (L + 3M)^3 = 3^\mu (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec $L + M = 3^{\mu-2} a^3$;

$$(L + M)^3 + (L - M)^3 = 2^\lambda (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec $L = 2^{\lambda-1} a^3$;

$$(L + M)^3 + (2M)^3 = (L^2 + 3M^2) a^3,$$

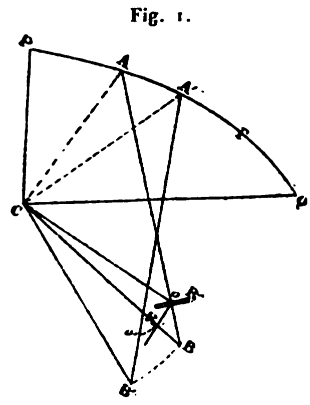
avec $L + 3M = a^3$.

NOTE SUR LE PLANIMÈTRE POLAIRE;

PAR M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Nice.

ABC est un levier articulé, composé de deux branches AB, BC réunies par une charnière B. L'extrémité C est fixe; l'extrémité A décrit une courbe donnée Γ. Je me

Fig. 1.



propose d'abord d'établir une relation entre l'aire de la courbe Γ et l'arc décrit dans le mouvement du levier par un point donné O de la branche AB.

On peut passer de la position ABC du levier à la position infiniment voisine A'B'C par une rotation d'angle $\widehat{ACA'} = d\omega$ autour du point fixe C. Dans ce mouvement, le point O décrit l'arc OO', et l'on a aussi

$$\widehat{OCO'} = \widehat{BCB'} = d\omega.$$

Dans le triangle ACO, on a, en posant $CA = \rho$, $OA = a$, $CO = r$,

$$(1) \qquad \rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\widehat{AOC}.$$

Dans le triangle COB, en posant OB $= b$, CB $= c$, on a de même

$$(2)\qquad c^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\widehat{COB}.$$

Donc, en retranchant ces deux égalités membre à membre,

$$(3)\qquad \rho^2 - c^2 = a^2 - b^2 + 2(a+b)r\cos\widehat{COB}.$$

Si l'on fait $OO' = dS$, comme $r d\omega = dS$, on a, en éliminant r,

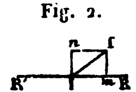
$$(4)\qquad \rho^2\frac{d\omega}{2} = (a^2 + c^2 - b^2)\frac{d\omega}{2} + (a+b)\,dS\cos\widehat{COB}.$$

Mais $\rho^2\dfrac{d\omega}{2}$ est l'aire du secteur ACA'; donc, si l'on intègre entre deux limites ω_1, ω_2 de l'argument, correspondant au secteur plan CPQ, on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \text{aire CPQ} &= (a^2 + c^2 - b^2)\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ &\quad + (a+b)\int_{\omega_1}^{\omega_2} dS\cos\widehat{COB}, \end{aligned}\right.$$

$dS\cos\widehat{COB}$ étant considéré comme une fonction de ω, variable indépendante. Telle est la relation cherchée. On pourrait en déduire aisément l'aire de la courbe Γ si l'on pouvait déterminer l'intégrale $\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos\widehat{COB}\,dS$. Un artifice mécanique permet de résoudre cette difficulté. Soit

Fig. 2.



RR' une roue verticale dont le centre est I. Supposons que le centre de la roue subisse un déplacement horizontal rectiligne II'. Ce dernier peut être considéré comme

la résultante de deux déplacements horizontaux rectangulaires, l'un suivant Im, l'autre In perpendiculaire au plan de la roue.

Le premier fait tourner la roue de la quantité Im égale à $II' \cos \widehat{I'Im}$; le second ne fait que déplacer la roue parallèlement à elle-même, sans provoquer de rotation. Donc la quantité dont la roue a tourné pour un déplacement II' de son centre est uniquement la projection de II' sur le plan de la roue.

Plaçons donc perpendiculairement à AB une roue RR' dont O soit le centre. La quantité du dont cette roue aura avancé pour le déplacement OO' sera mesurée par $du = dS \cos(OO', RR')$. Or, pour fixer les idées, nous supposerons la quantité du positive quand le mouvement de la roue s'effectue dans le même sens que celui de A vers A' et négative dans le cas contraire. Dans la disposition de la figure, on a

$$du = - dS \cos \widehat{COA} = dS \cos \widehat{COB},$$

et par suite

$$\int (a + b) dS \cos \widehat{COB} = \int (a + b)\, du.$$

Soit donc U la somme algébrique des quantités du dont la roue a avancé dans chaque déplacement élémentaire; on a

$$(6) \qquad \text{aire CPQ} = (a^2 + c^2 - b^2)\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} - (a + b)\,\text{U}.$$

C'est sur ce principe qu'est fondé l'usage d'un ingénieux instrument, le *planimètre polaire,* inventé en 1856 par M. Amsler-Laffon, à Schaffouse, et qui rend aujourd'hui de grands services aux Ponts et Chaussées et à l'Administration forestière pour le calcul rapide de l'aire

contenue dans un contour déterminé. La roulette ROR′ est divisée et se meut devant un vernier fixe. Une vis sans fin communique le mouvement de la roue verticale à un disque horizontal divisé qui sert de compteur. L'extrémité A est munie d'un tracelet pointu avec lequel on décrit toutes les sinuosités de la courbe.

Il y a deux façons d'employer le planimètre.

1° La pointe fixe C est à l'intérieur de l'aire à mesurer. Les limites d'intégration sont alors $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\pi$. Une lecture faite sur le compteur, sur la roue et sur le vernier donne U. On en déduit la surface cherchée

$$(7) \qquad S = (a^2 + c^2 - b^2)\pi + (a + b)U.$$

La constante $(a^2 + c^2 - b^2)\pi$ est calculée une fois pour toutes et inscrite sur l'instrument même; il n'y a donc qu'à calculer $(a + b)U$ et à y ajouter cette constante K. On peut même éviter cette addition en choisissant le point O sur AB de façon que

$$a^2 + c^2 - b^2 = 0;$$

on a alors tout simplement

$$(7') \qquad S = (a + b)U.$$

2° On peut mettre la pointe fixe C à l'extérieur du contour de l'aire mesurée; alors les deux limites d'intégration ω_1, ω_2 sont égales, et il reste uniquement

$$(8) \qquad S = (a + b)U.$$

Une simple lecture donne encore l'aire.

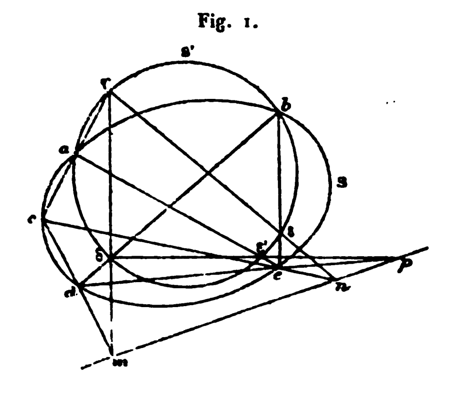
CONSTRUCTIONS DIVERSES ET SOLUTIONS DE PROBLÈMES GRAPHIQUES RELATIFS AUX CONIQUES;

PAR M. GENTY.

PROBLÈME I. — *Étant donnés deux points a et b communs à deux coniques* S *et* S', *et trois autres points de chacune d'elles c, d et e, f, g et h, trouver la seconde corde commune de ces deux courbes.*

Solution. — Mener les droites ac et bd; chercher, au moyen du théorème de Pascal, les points d'intersection γ

Fig. 1.



et δ de ces deux droites avec la conique S'. Les droites cd et $\gamma\delta$ se coupent en un point m de la corde commune cherchée.

On obtiendra deux autres points n et p de cette droite par une construction analogue.

La construction s'applique évidemment sans modification quand les points a et b se confondent, c'est-à-dire quand les coniques S et S' sont tangentes au point a. De même, deux des points c, d, e peuvent se confondre; l'un

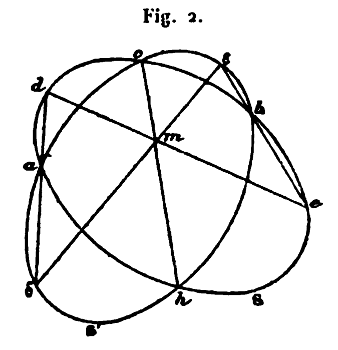
d'eux peut même se confondre avec le point *a* ou le point *b*; l'examen de ces cas particuliers ne présente aucune difficulté.

Si, par exemple, les points *c* et *d* sont confondus en un seul, on mène les droites *ac* et *bc* qui coupent S' aux points γ et γ' respectivement, et l'intersection de la droite $\gamma\gamma'$ avec la tangente à la conique S' au point *c*, supposée connue ou construite, est un point de la corde commune.

PROBLÈME II. — *Étant donnés trois points a, b et c communs à deux coniques* S *et* S', *et deux autres points d, e et f, g de chacune d'elles, trouver le quatrième point commun à ces deux courbes.*

Ce problème n'est évidemment qu'un cas particulier du précédent. Si, en effet, on considère la corde *ab* comme

Fig. 2.



une corde commune aux coniques, on pourra trouver, à l'aide de la construction ci-dessus, un point *m* de la seconde corde commune. La droite *cm* sera donc cette corde elle-même, et elle coupera S et S' au point *h* cherché. En considérant successivement les droites *bc* et *ca* comme des cordes communes, on trouvera deux autres droites passant aux points *a* et *b* respectivement et au point *h*.

APPLICATIONS.

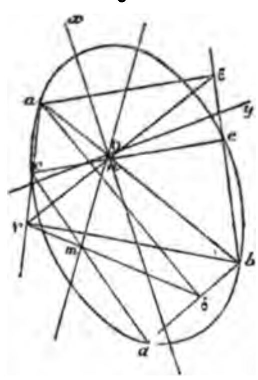
1° *Trouver les directions des axes d'une conique S, dont on donne cinq points a, b, c, d, e (ou bien quatre points et la tangente en l'un de ces points, ou encore trois points et les tangentes à la courbe en deux de ces points).*

Il suffit de trouver un système de cordes communes de S avec un cercle : les bissectrices des angles formés par ces cordes communes sont parallèles aux directions cherchées.

Nous prendrons pour le cercle S' le cercle décrit sur *ab* comme diamètre, et alors la construction est la suivante :

Du point *a* abaisser sur les droites *bd* et *be* des perpendiculaires *a*δ, *a*ε; du point *b* abaisser sur *ac* la perpendiculaire *b*γ. Soient *m* le point d'intersection des droites *cd* et $\gamma\delta$, *n* celui des droites *ce* et $\gamma\varepsilon$: les bissectrices des angles des droites *mn* et *ab* ont les directions cherchées.

Fig. 3.

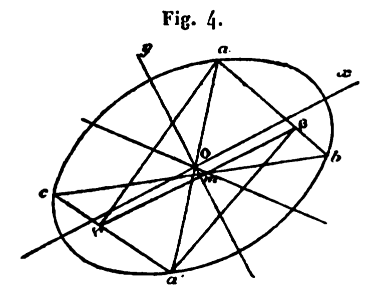


2° *Trouver les directions des axes d'une conique donnée par son centre O et trois points a, b et c.*

On prend pour la conique S' le cercle décrit du point O comme centre avec O*a* pour rayon.

Construction. — Soit a' le point de la conique symétrique du point a par rapport au centre. Abaisser du point a' une perpendiculaire $a'\beta$ sur ab, du point a une perpendiculaire $a\gamma$ sur $a'c$, et soit m le point d'intersection

Fig. 4.

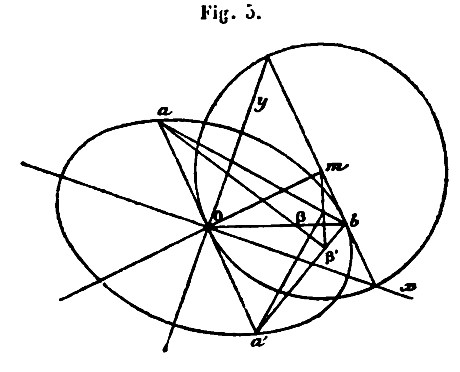


des droites bc et $\beta\gamma$: le demi-diamètre de la conique dirigé suivant Om est égal à Oa, et les bissectrices Ox et Oy des angles des droites Oa et Om donnent les directions des axes.

3° *Trouver les directions des axes d'une conique, connaissant deux demi-diamètres conjugués* Ob *et* Oa *de la courbe. On prend pour* S' *le même cercle que ci-dessus.*

Construction. — Abaisser des points a et a' des per-

Fig. 5.



pendiculaires $a\beta'$ et $a'\beta$ sur les droites $a'b$ et ab respec-

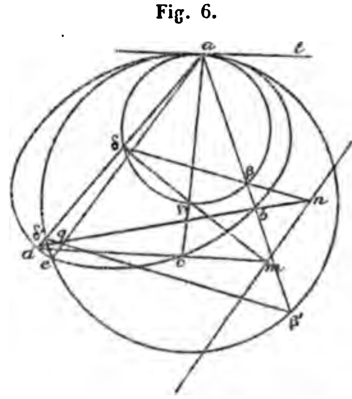
tivement, et déterminer le point de rencontre m des droites $\beta\beta'$ et de la tangente en b à la conique : les directions cherchées sont les bissectrices des angles formés par les droites Om et Oa. Il est facile de reconnaître qu'on peut obtenir ces bissectrices en joignant le point O aux points d'intersection de la ligne bm avec le cercle décrit du point m comme centre avec mO pour rayon.

On détermine ensuite très simplement les longueurs des axes.

4° *On donne quatre points* a, b, c, d *d'une conique* S *et la tangente au point* a : *on demande le centre de courbure de la courbe en ce point.*

Construction. — Chercher, au moyen de la construction connue, la corde d'intersection mn de la conique S

Fig. 6.



avec un cercle quelconque tangent au point a à cette courbe. Mener par le point a une parallèle à mn: elle rencontre S en un point e du cercle de courbure au point a; ce cercle se trouve ainsi complètement déterminé.

5° *Construire une conique, connaissant son cercle osculateur au point* a *et deux autres points* b *et* d *de la courbe.*

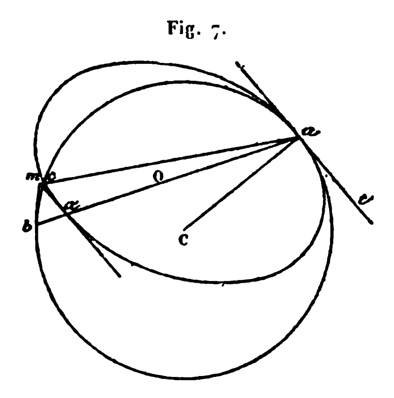
Construction (*voir* la *fig.* 6). — Soient δ' et β' les points d'intersection respectifs des droites *ad* et *ab* avec le cercle de courbure au point *a*, *q* le point d'intersection des droites *db*, $\delta'\beta'$. La droite *aq* rencontre le cercle de courbure en son point d'intersection *e* avec la conique. On peut maintenant construire cette courbe, puisqu'on en connaît quatre points *a*, *b*, *d*, *e* et la tangente *at* au point *a*.

6° *Construire une conique, connaissant le centre* O *et le centre de courbure en un point a.*

Si par le point de contact *a* de deux coniques S et S', tangentes en ce point, on mène une corde qui les rencontre de nouveau aux points *b* et *b'* respectivement, les tangentes à ces deux points se coupent sur la corde commune des deux coniques.

Construction. — Décrire le cercle osculateur au point *a*; déterminer les points d'intersection *a'* et *b* du diamètre O*a* avec la conique et le cercle osculateur respectivement

Fig. 7.



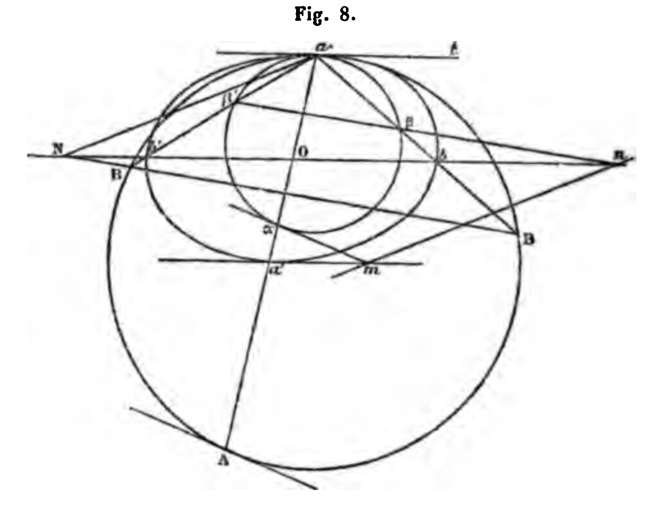
(O*a* = O*a'*); mener les tangentes en ces deux points, en remarquant que la tangente au point *a'* est parallèle à la tangente *at* au point *a*. Soit *m* le point d'intersection de ces deux tangentes : la droite *am* coupe le cercle oscula-

teur en son point d'intersection avec la conique. On peut maintenant construire cette courbe avec la plus grande facilité, puisqu'on en connaît le centre, deux points et la tangente à l'un d'eux.

7° *Étant donnés deux diamètres conjugués* aa', bb' *d'une conique, construire le cercle osculateur au point* a.

Construction. — Décrire un cercle quelconque tangent à la conique au point a; mener les droites ab, ab', aa', qui coupent ce cercle aux points β, β' et α respectivement. Soient n le point d'intersection des droites $\beta\beta'$ et

Fig. 8.



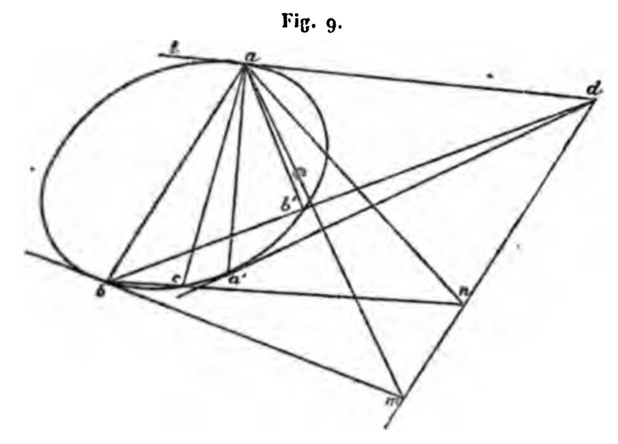
bb', m celui des tangentes à la conique et au cercle aux points a' et α respectivement : la droite mn est la corde commune aux deux courbes. Si donc on mène par le point a une parallèle aN à mn, on aura la corde d'intersection de la conique avec son cercle osculateur au point a. Soit N le point d'intersection de cette droite avec bb'; si l'on mène par le point N une parallèle à $\beta\beta'$, elle rencontrera les droites ab et ab' en deux points B et B' du cercle osculateur.

De même, si M est le point de rencontre de la droite aN avec la tangente à la conique au point a', et que du point M on mène une parallèle à $m\alpha$, cette droite rencontrera aa' en un point A du cercle cherché, et elle est tangente à ce cercle en ce point.

La ligne $\beta\beta'$ fait avec les lignes ab et ab' les mêmes angles que la tangente at au point a fait avec les lignes ab' et ab respectivement; la ligne $m\alpha$ fait avec aa' le même angle que at. Cette remarque montre très simplement comment on peut construire la corde d'intersection d'une conique avec l'un de ses points considéré comme un cercle infiniment petit, étant donnés la tangente en ce point et trois autres points, ou bien la tangente en ce point, deux autres points et la tangente à la conique en l'un d'eux. Ce dernier problème fera l'objet du paragraphe suivant.

8° *Étant donnés trois points a, b, c d'une conique, les tangentes aux points a et b respectivement, trouver*

Fig. 9.



la corde d'intersection de la conique avec le point a considéré comme un cercle infiniment petit.

Construction. — Mener une droite am telle que

$\widehat{mab} = \widehat{bat}$, et prendre son intersection m avec la tangente en b à la conique ; mener une autre droite an telle que $\widehat{nac} = \widehat{bat}$, et chercher l'intersection n de cette droite avec bc : la droite mn est la corde cherchée. Soient d son point d'intersection avec at et d' le point de contact de la tangente menée du point d à la conique : la droite aa' est la normale au point a ; et si l'on mène par le point a deux droites quelconques ab, ab' faisant des angles égaux avec la normale ad' et rencontrant la conique aux points b et b', la droite bb' passe par le point fixe d. Il est évident que les axes de la conique sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites da et dm.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES QUI ONT TOUTES LEURS RACINES RÉELLES ;

PAR M. LAGUERRE.

1. Je considérerai d'abord l'équation qui détermine $\tang\frac{\alpha}{n}$ quand on connaît $\tang\alpha$.

On a, d'après la formule de Moivre,

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

et

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} - i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha - i\sin\alpha ;$$

on en déduit

$$\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\alpha}{n} - i\sin\frac{\alpha}{n}}\right)^n = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha},$$

ou, en posant $\tang\frac{\alpha}{n} = x$,

$$(1) \qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i\tang\alpha}{1-i\tang\alpha}.$$

On voit immédiatement que cette équation ne peut avoir des racines égales ; pour démontrer que toutes ses racines sont réelles, je remarquerai que, pour chacune d'elles, on a

$$\operatorname{mod}(1+ix) = \operatorname{mod}(1-ix),$$

et de cette identité l'on déduit aisément la réalité de x.

Supposons, en effet, que x puisse avoir la valeur imaginaire $\alpha + \beta i$; on aurait

$$\operatorname{mod}(1-\beta+\alpha i) = \operatorname{mod}(1+\beta-\alpha i)$$

ou bien

$$(1-\beta)^2 + \alpha^2 = (1+\beta)^2 + \alpha^2,$$

ce qui est évidemment impossible si β est différent de zéro.

L'équation (1) a donc toutes ses racines réelles et inégales [1].

2. Les mêmes considérations permettent de démontrer une importante proposition, due à M. Hermite [2] et que l'on peut énoncer de la façon suivante :

---

[1] *Voir* à ce sujet une Note de M. Biehler : *Sur une application de la méthode de Sturm* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 76). Voir également une Note du même auteur publiée dans le dernier numéro et dont je n'ai eu connaissance qu'après la composition de mon article.

[2] *Sur l'indice des fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 131).

M. Biehler est arrivé en même temps au même théorème, qu'il a démontré dans une Note *Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles*, insérée au *Journal de M. Borchardt*, t. 87, p. 350.

Soient $\alpha+\beta i, \gamma+\delta i, \ldots, \lambda+\mu i$ des quantités imaginaires, dans lesquelles les coefficients de i ont tous le même signe; si l'on pose, pour abréger,

$$\Pi(x-\alpha-\beta i)=(x-\alpha-\beta i)(x-\gamma-\delta i)\ldots(x-\lambda-\mu i)$$
$$=\mathrm{F}(x)+i\Phi(x),$$

l'équation

$$p\,\mathrm{F}(x)+q\,\Phi(x)=0,$$

où p et q désignent des nombres réels arbitraires, a toutes ses racines réelles.

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante

$$(p-iq)\,\Pi(x-\alpha-\beta i)+(p+iq)\,\Pi(x-\alpha+\beta i)=0,$$

d'où l'on déduit

$$(2)\qquad \operatorname{mod}\Pi(x-\alpha-\beta i)=\operatorname{mod}\Pi(x-\alpha+\beta i),$$

et il est aisé d'en conclure que x est nécessairement réel.

Ayant, en effet, tracé dans un plan deux axes rectangulaires OX et OY, je représente, suivant l'usage ordinaire, la quantité imaginaire $X+Yi$ par le point dont les coordonnées sont X et Y. Soient A, C, ..., L les points qui représentent les quantités $\alpha+\beta i, \gamma+\delta i, \ldots, \lambda+\mu i$; les nombres $\beta, \delta, \ldots, \mu$ ayant tous le même signe, ces points sont tous situés d'un même côté de l'axe OX, au-dessus de cet axe par exemple; quant aux points A', C', ..., L', qui représentent les quantités conjuguées $\alpha-\beta i, \gamma-\delta i, \ldots, \lambda-\mu i$, comme ils sont symétriques des premiers relativement à l'axe OX, ils sont situés au-dessous de cette droite.

Cela posé, en désignant par P le point représentatif de x, l'égalité (2) peut s'écrire ainsi qu'il suit:

$$\mathrm{PA}.\mathrm{PC}\ldots\mathrm{PL}=\mathrm{PA}'.\mathrm{PC}'\ldots\mathrm{PL}'.$$

Or, si x était imaginaire, le point P serait situé en dehors de l'axe OX, au-dessus de cette droite par exemple, et l'on aurait

$$PA < PA', \quad PB < PB', \quad \ldots, \quad PL < PL',$$

inégalités incompatibles avec la relation précédente.

La quantité x est donc nécessairement réelle et la proposition est entièrement démontrée.

3. Parmi les conséquences que l'on peut en déduire, je mentionnerai la suivante, à cause de sa simplicité.

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles; en désignant par ω, p et q des quantités réelles quelconques, si l'on pose, pour abréger,

$$f(x + \omega i) = F(x) + i\,\Phi(x),$$

l'équation

$$p\,F(x) + q\,\Phi(x) = 0$$

a également toutes ses racines réelles.

II.

4. Quand, une équation algébrique étant ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, la suite des termes présente des lacunes, on peut, comme on le sait, en déduire aisément une limite supérieure du nombre des racines réelles de l'équation.

Cette conséquence immédiate de la règle des signes de Descartes a de nombreuses applications; en voici quelques-unes très simples qui présentent quelque intérêt.

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique du degré n et ayant toutes ses racines réelles; développons $\frac{1}{f(x)}$ suivant les puissances croissantes de x. Soient $F(x)$ la série que l'on obtient ainsi et $\Phi(x)$ l'ensemble des termes de cette série dont le degré ne dépasse pas m.

Par définition, le polynôme $\Phi(x)$ du degré m est tel que le développement de la différence $\frac{1}{f(x)} - \Phi(x)$, suivant les puissances croissantes de x, commence par un terme d'un ordre supérieur à m; on en déduit facilement l'égalité suivante

$$1 = f(x)\,\Phi(x) + x^p\mathrm{P},$$

où P désigne un polynôme et p un nombre entier supérieur à m, d'où encore

$$f(x)\,\Phi(x) = 1 - x^p\mathrm{P}.$$

Considérons maintenant l'équation

$$f(x)\,\Phi(r) = 0,$$

que l'on peut écrire

$$1 - x^p\mathrm{P} = 0.$$

Cette équation présentant une lacune de $(p-1)$ termes entre le premier et le second terme, le nombre de ses racines imaginaires est au moins égal à $(p-2)$, et par conséquent au moins égal à $(m-1)$, puisque p est plus grand que m. Ces racines appartiennent toutes aux deux équations $f(x) = 0$ et $\Phi(x) = 0$; la première a d'ailleurs toutes ses racines réelles et la seconde est du degré m, d'où il suit que, ayant au moins $(m-1)$ racines imaginaires, elle ne peut avoir qu'une seule racine réelle, ce qui aura lieu si elle est de degré impair.

Les considérations qui précèdent s'appliquent au développement de l'expression $\frac{1}{\sqrt[q]{f(x)}}$, où q désigne un nombre entier quelconque et $f(x)$ un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré.

Désignons par $\Phi(x)$ l'ensemble des termes de ce développement dont le degré ne dépasse pas m; le premier

terme de la série

$$\frac{1}{\sqrt[q]{f(x)}} - \Phi(x)$$

étant d'un ordre supérieur à m, on en conclut aisément l'égalité

$$1 = f(x)\,\Phi^q(x) + x^p\mathrm{P},$$

où P désigne un polynôme et p un nombre entier supérieur à m.

Cette égalité peut s'écrire

$$1 - x^p\mathrm{P} = f(x)\,\Phi^q(x),$$

et l'on en conclut, comme précédemment, que l'équation

$$f(x)\,\Phi^q(x) = 0$$

a au moins $(m - 1)$ racines imaginaires; ces racines ne pouvant appartenir qu'à l'équation $\Phi(x) = 0$, celle-ci, qui est du degré m, a au plus une racine réelle.

J'aurais pu considérer l'expression $\frac{1}{[f(x)]^{\frac{r}{q}}}$, où r et q désignent deux nombres entiers quelconques, puisque, si $f(x)$ est décomposable en facteurs réels du premier degré, il en est de même de $f^r(x)$, et de là, en passant au cas où la fraction $\frac{r}{q}$ tend vers un nombre incommensurable quelconque, je pourrai énoncer la proposition suivante :

En désignant par ω *une quantité* positive *quelconque* (commensurable ou incommensurable), *si l'on développe* $\frac{1}{f^\omega(x)}$ *suivant les puissances croissantes de* x *et si l'on désigne par* $\Phi(x)$ *l'ensemble des termes de ce développement dont le degré ne dépasse pas* m, *quel que soit le nombre* m, *l'équation* $\Phi(x) = 0$ *a au plus une racine réelle.*

5. Comme application, je poserai

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{p}\right)^p:$$

on voit, par ce qui précède, qu'en désignant par $\Phi(x)$ l'ensemble des termes du degré m dans le développement de $\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p}$, l'équation $\Phi(x) = 0$ a au plus une racine réelle, quel que soit le nombre positif p. Si, maintenant, on fait croître indéfiniment p, l'expression $\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p}$ a pour limite e^x.

D'où la proposition suivante :

Si l'on égale à zéro l'ensemble des m premiers termes de la série suivant laquelle se développe e^x, l'équation ainsi obtenue a au plus une racine réelle.

Cette proposition peut, du reste, se démontrer très aisément en s'appuyant sur le théorème de Rolle (*voir* notamment le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Hermite, année 1867-1868); mais il résulte, en outre, du théorème démontré plus haut, que, si $f(x)$ est un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré, le développement de l'expression

$$\frac{e^x}{f^\omega(x)}$$

jouit de la même propriété, quel que soit le nombre positif ω.

6. Les considérations qui précèdent s'appliquent entièrement à un cas plus général et plus important; mais, avant de l'aborder, je crois devoir rappeler quelques définitions.

En désignant par $V(x)$ un polynôme entier en x ou

une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et par $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur est du degré n et le numérateur du degré m, on dit que cette fraction est une réduite de $V(x)$ si le développement en série de la différence

$$V(x) - \frac{\Phi(x)}{F(x)}$$

commence par un terme de l'ordre de x^{m+n+1}.

Il est facile d'obtenir ces réduites; multiplions, en effet, $V(x)$ par un polynôme $F(x)$ du degré n et renfermant, par suite, $(n+1)$ indéterminées. En développant le produit ainsi obtenu, nous obtiendrons d'abord un polynôme du degré m, $\Phi(x)$, puis une série de termes contenant x^m en facteurs et nous pourrons disposer des $(n+1)$ coefficients indéterminés de façon à annuler, dans le développement, les coefficients de x^{m+1}, $x^{m+2}, \ldots, x^{m+n}$; il suffira en effet, pour cela, de trouver des valeurs de $(n+1)$ inconnues satisfaisant à n équations linéaires sans second membre, et l'on sait qu'un pareil système d'équations admet toujours au moins une solution dans laquelle les inconnues ne sont pas toutes nulles en même temps. Les polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$ étant déterminés comme je viens de le dire, il est clair que la fraction $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ est une réduite de $F(x)$.

Cela posé, $f(x)$ désignant un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré, soit $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ une réduite de $f(x)$, en sorte que, $\Phi(x)$ étant du degré m et $F(x)$ du degré n, le développement de

$$f(x) - \frac{\Phi(x)}{F(x)}$$

commence par un terme de l'ordre $(m+n+1)$.

On aura évidemment, en désignant par P un polynôme entier,

$$F(x)f(x) - \Phi(x) = x^{m+n+1}P,$$

d'où

$$\Phi(x) + x^{m+n+1}P = F(x)f(x).$$

Or, le terme du degré le plus élevé dans $\Phi(x)$ étant du degré m, on voit que l'équation

$$\Phi(x) + x^{m+n+1}P = 0$$

a au moins $(n-1)$ racines imaginaires, et, comme ces racines appartiennent à l'équation $F(x)f(x) = 0$ et que $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, on en conclut que l'équation $F(x) = 0$, qui est du degré n, a au plus une racine réelle.

On obtiendrait un résultat analogue en considérant les réduites $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ du développement de la fraction $\frac{1}{f(x)}$, et l'on établirait facilement que l'équation $\Phi(x) = 0$ a au plus une racine réelle.

En particulier, posons d'abord, en désignant par p un nombre entier arbitraire,

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p.$$

Si nous faisons croître indéfiniment le nombre entier m, nous en conclurons que les dénominateurs des réduites de e^x ont au plus un facteur réel du premier degré; nous voyons, en outre, que la même proposition a lieu à l'égard des réduites de l'expression $e^x\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ désigne un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré.

Semblablement, en posant

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{p}\right)^p$$

et en faisant croître indéfiniment le nombre entier p, nous voyons que les numérateurs des réduites de e^x ont au plus un facteur réel du premier degré, et la même proposition a lieu à l'égard des numérateurs des réduites de l'expression $\frac{e^x}{\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ désigne, comme ci-dessus, un polynôme quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré.

7. Comme je viens de le montrer, si l'on considère une réduite quelconque $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ de la transcendante e^x, les équations $\Phi(x) = 0$ et $F(x) = 0$ ont au plus une racine réelle.

Il ne sera peut-être pas inutile de montrer comment on peut facilement former les polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$.

A cet effet, je considérerai l'expression $F(x)\, e^{zx}$ et poserai

$$F(x)\, e^{zx} = \Sigma A_p x^p.$$

Le polynôme $F(x)$ étant du degré n, je remarque tout d'abord que A_{m+n}, qui est du degré $(m+n)$, est divisible par z^n. En dérivant par rapport à z l'équation précédente, on a d'ailleurs

$$F(x) e^{zx} = \Sigma A'_p x^{p-1},$$

d'où

$$\Sigma A_p x^p = \Sigma A'_p x^{p-1};$$

et l'on en conclut que chacun des coefficients A_p est la dérivée par rapport à z du coefficient qui le suit dans la série.

Je remarque maintenant que, $F(x)$ étant le dénominateur d'une réduite de e^x, le développement de $F(x)\, e^x$ manque des termes en x^{m+1}, x^{m+2}, ..., x^{m+n}; tous les coefficients

$$A_{m+1},\ A_{m+2},\ \ldots,\ A_{m+n}$$

.

s'annulent donc quand on y fait $z = 1$. Par suite, A_{m+n}, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, s'annule dans la même hypothèse; A_{m+n} est donc divisible par $(z-1)^n$. J'ai montré plus haut que ce coefficient était du degré $(m+n)$ par rapport à la lettre z et qu'il était divisible par z^m; il est donc égal, à un facteur numérique près (que l'on peut prendre arbitrairement), à $z^m(z-1)^n$.

Ainsi, une propriété caractéristique du polynôme $F(x)$ est que, dans le développement de $F(x)\,e^{zx}$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de x^{m+n} est (sauf un facteur numérique) $z^m(z-1)^n$.

En supposant donc ce facteur égal à $\dfrac{1}{1.2.3\ldots(m+n)}$ et en posant

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

on obtiendra facilement l'égalité

$$\begin{aligned}&a_0 z^{m+n} + a_1(m+n)z^{m+n-1} + a_2(m+n)(m+n-1)z^{m+n-2} + \ldots\\ &= z^{m+n} - n z^{m+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} z^{m+n-2} - \ldots,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$a_0 = 1,\quad a_1 = -\frac{n}{m+n},\quad a_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{(m+n)(m+n-1)},\ldots$$

et

$$\begin{aligned}F(x) = 1 &- \frac{n}{m+n}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}x^2\\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{1}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}x^3 + \ldots\end{aligned}$$

Quant au polynôme $\Phi(x)$, je remarquerai, pour le déterminer, que la fraction $\dfrac{F(x)}{\Phi(x)}$ est une réduite de e^{-x} et que cette fraction tend vers l'unité quand x tend vers

zéro; on a donc, en appliquant la formule précédente,

$$)=1+\frac{m}{m+n}x+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}x^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}x^3+\ldots.$$

8. Considérons en particulier les *réduites principales*, c'est-à-dire celles où $m=n$; on a alors ([1])

$$F(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2n(2n-1)}x^2$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)}x^3+\ldots$$

et

$$\Phi(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2n(2n-1)}x^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)}x^3+\ldots,$$

en sorte que $\Phi(x)=F(-x)$.

Ayant

$$e^x=\frac{\Phi(x)}{F(x)}+(x^{2n+1})\quad ([2]),$$

on en déduit

$$x=\log\frac{\Phi(x)}{F(x)}+(x^{2n+1})$$

et, en égalant les dérivées des deux membres,

$$\frac{F'(x)}{F(x)}-\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}=-1+(x^{2n}).$$

([1]) Sur ces polynômes, voir le Mémoire de M. Hermite *Sur la fonction exponentielle*.

([2]) Je désigne ici et dans tout ce qui suit par (x^p) une série ordonnée suivant les puissances de x et commençant par un terme de l'ordre x^p.

En désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les diverses racines de l'équation $F(x) = 0$, on voit aisément que les racines de l'équation $\Phi(x) = 0$ sont $-\alpha, -\beta, -\gamma, \ldots$; l'égalité précédente peut donc s'écrire

$$\sum \frac{1}{x-\alpha} - \sum \frac{1}{x+\alpha} = -1 + (x^{2n})$$

ou encore

$$\sum \frac{2\alpha}{x^2-\alpha^2} = -1 + (x^{2n}).$$

En désignant par S_{-p} la somme des inverses des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation $F(x) = 0$, on en déduit, en développant le premier membre en série,

$$2S_{-1} + 2S_{-3}x^2 + 2S_{-5}x^4 + \ldots = 1 + (x^{2n}),$$

d'où les relations suivantes, qui caractérisent entièrement le polynôme $F(x)$:

$$S_{-1} = \frac{1}{2}, \quad S_{-3} = 0, \quad S_{-5} = 0, \quad \ldots, \quad S_{-(2n-1)} = 0 \quad (^1).$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Bourguet.

J'ai l'honneur de vous adresser la solution de deux questions proposées à la réunion des Sociétés savantes en 1877.

1° *Le sommet d'un angle droit décrit une ellipse tandis qu'un de ses côtés tourne autour du centre : trouver l'enveloppe de l'autre côté.*

---

(1) Sur cette question, voir ma Note *Sur un problème d'Algèbre* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 26).

Soient P un point de l'ellipse, u le produit des rayons vecteurs, ρ le rayon central, θ l'angle que ρ fait avec la normale, ω l'angle qu'il fait avec l'axe focal.

Nous avons

$$\rho^2 = a^2 + b^2 - u,$$

$$\text{tang}^2\theta = \left(1 - \frac{u}{a^2}\right)\left(\frac{u}{b^2} - 1\right),$$

$$\cos^2\omega = \frac{a^4}{c^2\rho^2}\left(1 - \frac{u}{a^2}\right), \quad \sin^2\omega = \frac{b^4}{c^2\rho^2}\left(\frac{u}{b^2} - 1\right).$$

Cela posé, construisons un point du lieu, et pour cela menons OM, PN perpendiculaires à OP, PM normale ; M sera le centre instantané de rotation. Menons MN perpendiculaire à PN ; N sera un point du lieu. Soient α, β les projections de OP, PN sur l'axe focal, nous avons

$$\alpha^2 = \frac{a^4}{c^2}\left(1 - \frac{u}{a^2}\right),$$

$$\beta^2 = \rho^2 \,\text{tang}^2\theta \sin^2\omega = \frac{b^4}{c^2}\left(1 - \frac{u}{a^2}\right)\left(\frac{u}{b^2} - 1\right)^2.$$

Donc

$$X = \alpha + \beta = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{u}{a^2}}\left[a^2 + b^2\left(\frac{u}{b^2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{u}{a^2}}\,(c^2 + u),$$

ou bien

$$a^2c^2X^2 = (a^2 - u)(c^2 + u)^2,$$

et, en changeant a, b en b, a,

$$b^2c^2Y^2 = (u - b^2)(c^2 - u)^2.$$

Il s'agit d'éliminer u entre ces deux équations. Développons :

$$u^3 - (b^2 - c^2)u^2 - c^2(a^2 + b^2)u + a^2c^2(X^2 - c^2) = 0,$$

$$u^3 - (a^2 + c^2)u^2 + c^2(a^2 + b^2)u - b^2c^2(Y^2 + c^2) = 0;$$

par addition et soustraction,

$$2u^3 - (a^2 + b^2)u^2 + c^2[a^2X^2 - b^2Y^2 - c^2(a^2 + b^2)] = 0,$$
$$3u^2 - 2(a^2 + b^2)u + [a^2X^2 + b^2Y^2 - c^4] = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$U = a^2X^2 + b^2Y^2 - c^4, \quad V = a^2X^2 - b^2Y^2 - c^2(a^2 + b^2);$$

multiplions la première équation par 3 et la seconde par $2u$, et retranchons :

$$3u^2 - 2(a^2 + b^2)u + U = 0,$$
$$(a^2 + b^2)u^2 - 2Uu + 3c^2V = 0,$$

d'où

$$4[(a^2 + b^2)^2 - 3U][U^2 - 3c^2(a^2 + b^2)V]$$
$$= [(a^2 + b^2)U - 9c^2V]^2.$$

Cette équation peut être mise sous une forme plus élégante; pour cela, posons

$$(a^2 + b^2)^2 - 3U = S, \quad (a^2 + b^2)U - 9c^2V = T.$$

On obtient, par la substitution,

$$4S^3 = [3T - 2S(a^2 + b^2)]^2,$$

courbe du sixième degré qui a quatre points de rebroussement aux points d'intersection de $S = 0$, $T = 0$ et tangente en ces points à $3T - 2(a^2 + b^2)S = 0$, et qui a quatre points doubles sur les axes de l'ellipse. Les deux situés sur le petit axe sont imaginaires; les deux autres sont réels si $a^2 > 2b^2$. Il en est de même des points de rebroussement, réels si $a^2 > 2b^2$ et imaginaires si $a^2 < 2b^2$.

Dans le premier cas, la courbe se compose de deux arcs tangents à l'ellipse aux sommets du petit axe, concaves vers le centre, et de deux arcs tangents à l'ellipse aux sommets du grand axe, convexes du côté du centre, se

raccordant aux deux autres, aux points de rebroussement.

Dans le second cas, la courbe se compose d'une boucle, sans points singuliers, inscrite dans l'ellipse.

Les coordonnées des points doubles sont $Y = 0$, $X = \frac{2bc}{a}$, et le coefficient angulaire de la tangente en ce point $\frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}}$. Cette courbe a pour podaire, relativement au centre, l'ellipse directrice.

2° *Trouver le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère.*

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les quatre côtés du quadrilatère. Entre ces quatre polynômes, nous avons la relation d'identité

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0.$$

Soient α, β, γ, δ les distances d'un foyer aux quatre côtés du quadrilatère, α', β', γ', δ' les distances de l'autre foyer. Nous avons, comme on sait,

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \delta\delta'$$

ou

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha'}} = \frac{\beta}{\frac{1}{\beta'}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\gamma'}} = \frac{\delta}{\frac{1}{\delta'}}.$$

Comme les premières distances satisfont à la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0,$$

les secondes satisfont à la relation

$$\frac{A}{\alpha'} + \frac{B}{\beta'} + \frac{C}{\gamma'} + \frac{D}{\delta'} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu : courbe du troisième degré passant par les sommets du quadrilatère. La tangente en ces points est symétrique de la diagonale par rapport à

la bissectrice. Les points à l'infini sont donnés par la parabole inscrite. Comme le centre de cette ellipse infinie est sur la droite qui passe par le milieu des diagonales, on aura l'asymptote en prenant le symétrique du foyer de la parabole par rapport à cette droite et en lui menant une parallèle par ce dernier point. La courbe se compose d'une boucle et d'une branche infinie.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e di primo grado per mezzo di funzioni lineari; per F. Casorati. Extrait du t. XI, 2e série, des *Rendiconti del R. Istituto lombardo*; 1878.

Mémoire sur l'application du calcul des combinaisons à la théorie des déterminants; par M. Picquet. Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, XLVe Cahier; 1878.

AVIS.

Nous prévenons nos lecteurs que l'*Instruction* qui sera remise aux candidats à l'École Polytechnique à l'ouverture des séances des compositions écrites porte :

L'emploi du pistolet pour le tracé des courbes est rigoureusement interdit.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Soient a et A les affixes de deux quantités imaginaires x et X liées entre elles par la relation linéaire

$$X = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

où α, β, γ et δ désignent des quantités imaginaires quelconques; il est aisé de voir que, quand le point a décrit un cercle (ou une droite), il en est de même du point A. Je m'appuierai fréquemment sur cette propriété très simple, qui se rattache immédiatement à la théorie bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

2. Dans tout ce qui suit, la variable Y et les quantités analogues y, η, ... sont égales à l'unité et uniquement introduites pour l'homogénéité des formules; je les remplacerai même souvent par l'unité lorsqu'il n'y aura lieu de craindre aucune confusion.

Cela posé, soit l'équation

$$f(X, Y) = 0, \tag{1}$$

où $f(X, Y)$ est un polynôme homogène et du degré n par rapport à X et Y. Désignons par a l'affixe d'une quantité imaginaire quelconque x et par α l'affixe de la quantité ξ qui est déterminée par l'équation

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0. \tag{2}$$

On peut énoncer la proposition suivante :

Tout cercle passant par les points a et α renferme au moins une racine de l'équation (1); *il y a aussi au moins une racine à l'extérieur de ce cercle.*

Exceptionnellement, toutes les racines peuvent se trouver sur la circonférence du cercle; si cette circonférence, du reste, passe par $(n-1)$ *des racines, elle passe nécessairement par la $n^{ième}$ racine.*

Pour démontrer cette proposition, je remarquerai que, la relation (2) qui lie entre elles les quantités ξ et x étant projective, il suffit de l'établir pour une position particulière du cercle et des points a et α.

Je supposerai donc que le cercle se réduit à l'axe des abscisses et que l'on a $x = \infty$ et $\xi = 0$; la relation (2) se réduit alors à

$$b = 0,$$

et, comme b est la somme algébrique des racines, on voit que, si toutes les racines ne sont pas réelles (c'est-à-dire si elles ne sont pas toutes situées sur l'axe des abscisses), l'une au moins doit être située au-dessus de cet axe, tandis qu'une autre est située au-dessous.

La proposition est donc complètement démontrée.

3. Plus généralement, considérons les divers émanants

$$\xi f'_x + \eta f'_y, \quad \xi^2 f''_{x^2} + 2\xi\eta f''_{xy} + \eta^2 f''_{y^2},$$
$$\xi^3 f'''_{x^3} + 3\xi^2\eta f'''_{x^2y} + 3\eta\xi^2 f'''_{xy^2} + \eta^3 f'''_{y^3}, \quad \ldots$$

du polynôme f.

Soient Θ l'un quelconque de ces émanants, ξ et x deux quantités quelconques liées par la relation

(3) $$\Theta = 0;$$

on a le théorème suivant :

Tout cercle passant par les points x et ξ renferme au moins une racine de l'équation (1); *il y a aussi au moins une racine à l'extérieur de ce cercle.*

Pour le démontrer, je remarquerai que, Θ étant un covariant de f, il suffit de l'établir pour une position particulière du cercle et des valeurs particulières de x et de ξ. Je supposerai, comme précédemment, que le cercle se réduit à l'axe des abscisses et que l'on a $x = \infty$ et $\xi = 0$.

En considérant par exemple, pour plus de simplicité, l'émanant du troisième ordre, et en posant

$$f = ax^n + nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dx^{n-3} + \ldots,$$

la relation (3) devient

$$a\xi^3 + 3b\xi^2 + 3c\xi + d = 0,$$

d'où l'on déduit $d = 0$; et de là résulte immédiatement que, si l'équation proposée n'a pas toutes ses racines réelles, il y a au moins une racine imaginaire dans laquelle le coefficient de i est positif et au moins une dans laquelle il est négatif, ce qui constitue précisément le théorème que je veux démontrer.

En supposant en effet que, dans toutes les racines imaginaires de l'équation (1), les coefficients de i eussent le même signe, et en posant, pour abréger,

$$f = F + i\Phi,$$

il résulterait d'une remarque importante faite par

M. Hermite et M. Biehler que l'équation $pF + q\Phi = 0$ aurait toutes ses racines réelles, quels que fussent les nombres réels p et q.

Faisons, ce que l'on a toujours le droit de faire, $a = 1$, et, mettant en évidence la partie réelle des autres coefficients, posons

$$b = \beta + \beta' i, \quad c = \gamma + \gamma' i, \quad e = \varepsilon + \varepsilon' i, \quad \ldots;$$

il vient, en remarquant que d est nul,

$$\begin{aligned} pF + q\Phi = px^n &+ n(p\beta + q\beta')x^{n-1} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}(p\gamma + q\gamma')x^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(p\varepsilon + q\varepsilon')x^{n-4} + \ldots. \end{aligned}$$

Or on peut toujours trouver deux nombres p et q qui ne soient pas nuls en même temps et tels que l'on ait

$$p\gamma + q\gamma' = 0;$$

mais alors l'équation manquerait des deux termes consécutifs en x^{n-2} et x^{n-3}; ce qui est impossible, puisqu'elle a toutes ses racines réelles.

Ce raisonnement serait en défaut si les coefficients de x^n et x^{n-1} s'annulaient en même temps; mais on aurait dans ce cas $\beta' = 0$, et cela ne peut avoir lieu, puisque β' est la somme de quantités ayant toutes le même signe.

La proposition est donc entièrement établie; je ferai encore observer, comme précédemment, que, dans certains cas particuliers, toutes les racines peuvent se trouver sur la circonférence du cercle.

4. On déduit du théorème précédent une conséquence importante.

Soit K un cercle (ou une droite) quelconque tracé dans le plan; il le divise en deux régions distinctes. Supposons qu'une de ces régions renferme toutes les racines de l'équation (1) et que le point x soit situé dans l'autre région; je dis que toutes les racines de l'équation $\Theta = 0$ sont situées dans la région limitée par le cercle et qui renferme toutes les racines de l'équation (1).

En effet, si l'une des valeurs de ξ satisfaisant à l'équation $\Theta = 0$ était située dans la même région que le point x, par les deux points x et ξ on pourrait faire passer un cercle tangent à K; la portion du plan limitée par ce cercle et ne renfermant pas K devrait renfermer au moins une racine de l'équation (1), ce qui est impossible, puisque toutes les racines de cette équation sont comprises dans la région qui ne renferme pas le point x.

II.

5. Il résulte de la proposition précédente que, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, l'équation $\Theta = 0$ (où l'on considère l'une des variables x et ξ comme inconnue, tandis qu'on attribue à l'autre une valeur réelle arbitraire) a toutes ses racines réelles.

En particulier, l'équation

$$\xi^2 f''_{x^2} + 2\xi f''_{xy} + f''_{y^2} = 0$$

a toutes ses racines réelles, quelle que soit la valeur réelle attribuée à x, et de là résulte immédiatement cette proposition importante que j'ai eu plusieurs fois occasion d'employer :

Si l'équation $f = 0$ a toutes ses racines réelles, le hessien du polynôme f

$$f''^2_{xy} - f''_{x^2} f''_{y^2}$$

a toujours une valeur positive ou nulle.

6. On voit aussi que, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $\xi f'_x + f'_y = 0$.

Réciproquement, si, quelle que soit la valeur réelle attribuée à ξ, cette dernière équation a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation (1).

Pour établir cette proposition, je remarquerai d'abord qu'en posant $F = \xi f'_x + f'_y$, l'équation $F = 0$ ayant par hypothèse toutes ses racines réelles, l'expression $F''^2_{xy} - F''_{x^2} F''_{y^2}$ a toujours une valeur positive, quelle que soit la valeur de ξ.

Or on a

$$F''_{x^2} = \xi f'''_{x^3} + f'''_{x^2y},$$
$$F''_{xy} = \xi f'''_{x^2y} + f'''_{xy^2},$$
$$F''_{y^2} = \xi f'''_{xy^2} + f'''_{y^3},$$

et, quand on fait $\xi = x$, ces expressions ont des valeurs respectivement proportionnelles à f''_{x^2}, f''_{xy} et f''_{y^2} [1], d'où il résulte que $f''^2_{xy} - f''_{x^2} f''_{y^2}$ a toujours également une valeur positive.

Cela posé, étudions comment varient les racines de l'équation $F = 0$ quand ξ varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

En désignant par ξ' la dérivée de ξ par rapport à x, on a

$$\xi' f'_x + \xi f''_{x^2} + f''_{xy} = 0,$$

puis, en vertu de la relation $\xi f'_x + f'_y = 0$,

$$\xi' f'^2_x = f'_y f''_{x^2} - f'_x f''_{xy} = (n-1)(f''_{x^2} f''_{y^2} - f''^2_{xy});$$

or, de là résulte que ξ' est toujours négatif.

Ainsi, quand ξ croît de $-\infty$ à $+\infty$, les diverses racines de l'équation $F = 0$ vont toujours en décroissant.

---

(1) Ceci suppose évidemment $n > 2$.

Elles ont toujours d'ailleurs des valeurs distinctes (si l'on suppose, ce que l'on peut toujours faire, que l'équation $f = 0$ n'a pas de racines égales) ; car, si, pour deux valeurs différentes de ξ, l'équation $F = 0$ était satisfaite par la même valeur de x, on aurait à la fois

$$\xi f'_x + f'_y = 0$$

et

$$\xi' f'_x + f'_y = 0,$$

ce qui exigerait que l'on eût en même temps $f'_x = 0$ et $f'_y = 0$; or cela est impossible, puisque l'équation $f = 0$ n'a pas de racines égales.

Pour fixer les idées, supposons $n = 4$, et soient, pour $\xi = -\infty$, α, β et γ les racines de l'équation $F = 0$: quand ξ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la racine de l'équation $F = 0$ dont la valeur initiale est α va constamment en décroissant, passe de $-\infty$ à $+\infty$ et acquiert finalement la valeur γ ; la racine dont la valeur initiale est β va constamment en décroissant et acquiert finalement la valeur α. De même, la troisième racine décroît constamment depuis γ jusqu'à β.

La variable ξ croissant constamment depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, il y a nécessairement un instant où elle a la même valeur que la troisième racine ; à ce moment, ξ étant égal à x, on a

$$\xi f'_x + f'_y = x f'_x + f'_y = nf = 0 ;$$

d'où il suit que cette valeur de ξ est une racine de l'équation (1).

L'équation (1) a ainsi une racine comprise entre γ et β ; on prouverait de même qu'elle en a une comprise entre β et α, une autre entre α et $-\infty$ et une dernière entre $+\infty$ et γ ; elle a donc toutes ses racines réelles.

7. Comme application, je considérerai l'équation

$$x^m + px + q = 0.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que l'équation

$$\xi(3x^2+p)+2px+3q=0$$

ait toutes ses racines réelles, quelle que soit la valeur de ξ.

De là résulte que

$$p^2-3p\xi^2-9q\xi$$

doit toujours être positif; ce qui exige que $4p^3+27q^2$ et p soient négatifs. On retrouve ainsi l'équation de condition bien connue

$$4p^3+27q^2<0.$$

III.

8. La propriété du hessien d'un polynôme f décomposable en facteurs réels du premier degré et que j'ai mentionnée plus haut, à savoir qu'il a une valeur constamment positive, est un cas particulier de la proposition suivante, qui a d'utiles applications :

Si le polynôme f est décomposable en facteurs réels du premier degré et si l'on attribue à la variable x une valeur imaginaire quelconque $\alpha+\beta i$, le coefficient de i dans toutes les racines de l'équation $\Theta=0$ est de signe contraire *à celui de* β.

Cette proposition est un corollaire immédiat d'un théorème général que j'ai démontré plus haut (n° 4).

En particulier, si l'on fait $x=\alpha+\beta i$ dans l'expression

$$x-\frac{nf}{f'},$$

le coefficient de i dans le résultat de la substitution est de signe contraire à celui de β.

Il en est de même des diverses expressions

$$x - \frac{(n-1)f'}{f''}, \quad x - \frac{(n-2)f''}{f'''}, \quad \ldots,$$

puisque, quand l'équation $f = 0$ a toutes ses racines réelles, les équations $f' = 0$, $f'' = 0$, ... [1] jouissent de la même propriété.

9. Comme application, en désignant par f un polynôme décomposable en facteurs réels inégaux du premier degré et par a et b deux constantes réelles arbitraires, je considérerai l'équation

$$(4) \qquad \frac{f'}{f} + \frac{x-a}{b} = 0.$$

En substituant successivement dans le premier membre de cette équation $-\infty$, puis les racines de l'équation $f = 0$ et enfin $+\infty$, on constate aisément qu'elle a toutes ses racines réelles si b est < 0 et qu'elle a au plus deux racines imaginaires si b est > 0.

Dans ce dernier cas, désignons par $\alpha + \beta i$ une de ces racines; il résulte de ce qui précède que, si l'on remplace x par cette valeur dans l'expression

$$x - \frac{nf}{f'},$$

le coefficient de i dans le résultat de la substitution doit être de signe contraire à β.

---

[1] Ici, ainsi que dans tout ce qui suit, je désigne par f', f'', f''', ... les dérivées de f prises par rapport à la variable x.

Or, en vertu de l'équation (4), elle se réduit à

$$x - \frac{nb}{x - a}$$

et, en faisant $x = \alpha + \beta i$, à

$$\alpha + \beta i - \frac{nb}{a - \alpha - \beta i},$$

où le coefficient de i est

$$\beta \left[1 - \frac{nb}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \right].$$

Ayant donc $1 - \frac{nb}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} < 0$, on en déduit tout d'abord, comme je l'avais trouvé directement, que l'équation (4) ne peut avoir de racine imaginaire que si b est > 0.

On voit en second lieu que, *si b est > 0, et si l'équation a deux racines imaginaires, elles sont renfermées dans l'intérieur du cercle dont l'équation est*

$$(X - a)^2 + Y^2 = nb.$$

Il est remarquable que la position de ce cercle ne dépende pas de la valeur des racines de l'équation $f = 0$.

10. Considérons une équation $f = 0$ à coefficients réels ou imaginaires; soient $p, p', p'', \ldots$ les coefficients de i dans ses racines et β un nombre quelconque égal ou supérieur au plus grand de ces coefficients. Traçons dans le plan la droite parallèle à l'axe des abscisses et dont l'ordonnée a pour valeur β; on voit que toutes les racines de l'équation $f = 0$ sont situées au-dessous de cette droite, et, en vertu d'une proposition énoncée ci-dessus, il en est de même des racines des équations

$$f' = 0, \quad f'' = 0, \quad f''' = 0, \quad \ldots.$$

On en conclut que, si dans les expressions

$$x - \frac{nf}{f'}, \quad x - \frac{(n-1)f'}{f''}, \quad x - \frac{(n-2)f''}{f'''}, \quad \ldots$$

on remplace x par la quantité $\alpha + \beta i$, où α désigne un nombre réel arbitraire et β le nombre défini ci-dessus, le coefficient de i dans les résultats obtenus est inférieur à β.

Soient $F = 0$ une équation quelconque de degré n et $\alpha + \beta i$ celle de ses racines pour laquelle le coefficient de i a la plus grande valeur; en posant, pour abréger,

$$\frac{F}{x - \alpha - \beta i} = f,$$

on voit que, dans les expressions

$$\alpha + \beta i - \frac{(n-1)f(\alpha+\beta i)}{f'(\alpha+\beta i)},$$

$$\alpha + \beta i - \frac{(n-2)f'(\alpha+\beta i)}{f''(\alpha+\beta i)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

le coefficient de i est plus petit que β.

On trouve aisément d'ailleurs

$$f(\alpha+\beta i) = F'(\alpha+\beta i),$$

$$f'(\alpha+\beta i) = \frac{F''}{2}(\alpha+\beta i),$$

$$f''(\alpha+\beta i) = \frac{F'''}{3}(\alpha+\beta i),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où la conclusion suivante :

Étant donnée l'équation du degré n

$$F = 0,$$

désignons par $\alpha + \beta i$ celle de ses racines pour laquelle le coefficient de i a la plus grande valeur; cela posé,

les coefficients de i dans les expressions

$$\frac{F'(\alpha+\beta i)}{F''(\alpha+\beta i)}, \quad \frac{F''(\alpha+\beta i)}{F'''(\alpha+\beta i)}, \quad \ldots$$

sont tous positifs.

11. Comme application, je me propose de montrer que le polynôme du degré n, étudié par M. Hermite et qui satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(5) \qquad f'' - xf' + nf = 0,$$

a toutes ses racines réelles.

Cette proposition bien connue peut s'établir par les considérations les plus élémentaires; je crois néanmoins, dans cette question importante de la détermination de la nature des racines d'une équation, qu'il est utile d'étudier toutes les méthodes qui peuvent conduire au résultat.

Supposons donc que l'équation $f = 0$ ait des racines imaginaires, et soit $\alpha + \beta i$ celle d'entre elles pour laquelle le coefficient de i est le plus grand. Je remarquerai tout d'abord que, l'équation ayant ses coefficients réels, les racines sont conjuguées deux à deux; par suite, β a une valeur positive.

J'observe ensuite que l'expression

$$\frac{f'(\alpha+\beta i)}{f''(\alpha+\beta i)}$$

se réduit à

$$\frac{1}{\alpha+\beta i},$$

en vertu de l'équation différentielle (5).

Or, le coefficient de i dans cette expression est le

nombre essentiellement négatif $\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, ce qui, d'après la proposition énoncée plus haut, est impossible. L'équation a donc toutes ses racines réelles.

La même démonstration s'applique au polynôme de Legendre qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2-1)f''+2xf'-n(n+1)f=0.$$

En conservant les mêmes notations que ci-dessus, on voit encore que, en vertu de cette équation différentielle, l'expression

$$\frac{f'(\alpha+\beta i)}{f''(\alpha+\beta i)}$$

se réduit à

$$\frac{1-(\alpha+\beta i)^2}{2(\alpha+\beta i)},$$

où le coefficient de i a le signe de l'expression

$$-\beta(1+\alpha^2+\beta^2),$$

et, cette quantité étant essentiellement négative, il en résulte que les polynômes de Legendre ont toutes leurs racines réelles.

NOTE SUR LE TRIANGLE INSCRIT ET CIRCONSCRIT A DEUX CONIQUES;

Par M. WEILL.

Considérons un quadrilatère ABDE ([1]) dont l'un des angles $\widehat{EDB}$ est droit, abaissons du point A la perpendi-

---

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

culaire AG sur le côté BD; soit C le point de concours des côtés opposés AE, BD; soit H le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

Si nous considérons les cercles décrits sur les diagonales AD et BE comme diamètres, les points H et D appartiennent à l'axe radical de ces cercles, comme ayant chacun la même puissance par rapport aux deux cercles. Dès lors, la droite qui joint les milieux des diagonales est perpendiculaire sur DH en K. Soit L le milieu de la diagonale AD, et soit I le centre d'une conique inscrite dans le quadrilatère ABDE. Ce point I sera sur LK. On a alors

$$\overline{ID}^2 - \overline{IH}^2 = \overline{LD}^2 - \overline{LH}^2.$$

Or la différence $\left(\overline{LD}^2 - \overline{LH}^2\right)$ représente la puissance du point H par rapport au cercle décrit sur la diagonale AD comme diamètre. Mais cette puissance est la moitié de celle du même point H par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC; car, si l'on prolonge la hauteur AH jusqu'à sa rencontre en H_1 avec le cercle circonscrit au triangle ABC, on a $GH = GH_1$, par suite

$$HG.HA = \tfrac{1}{2}HH_1.HA.$$

Si donc on appelle R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et δ la distance du point H au centre O de ce cercle, on aura

$$\overline{ID}^2 - \overline{IH}^2 = \frac{R^2 - \delta^2}{2}$$

ou

$$(1) \qquad 2(a^2 + b^2) - 2\overline{IH}^2 + \delta^2 - R^2 = 0.$$

La formule très simple que nous venons d'établir va nous conduire à de très nombreuses conséquences.

Théorème I. — *Si une conique est inscrite dans un*

triangle et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une circonférence ayant pour centre le point de concours des hauteurs du triangle.

La formule (1) donne immédiatement ce théorème, qui est dû à M. Mansion et qu'il a étendu à l'espace.

Théorème II. — *Si un triangle est circonscrit à une conique et si le point de concours des hauteurs de ce triangle a une puissance constante par rapport au cercle circonscrit, ce point décrit un cercle concentrique à la conique.*

Ce théorème, comme le précédent, n'est que la traduction de la formule (1).

Nous allons maintenant transformer cette formule et en déduire des théorèmes nouveaux.

Soit S le milieu de OH; ce point est le centre du cercle des neuf points du triangle ABC. On a la relation

$$2\overline{IO}^2 + 2\overline{IH}^2 = 4\overline{IS}^2 + \overline{OH}^2 = 4\overline{IS}^2 + \delta^2,$$

d'où

$$\delta^2 - 2\overline{IH}^2 = 2\overline{IO}^2 - 4\overline{IS}^2.$$

La formule (1) devient alors

$$(2) \qquad 2(a^2 + b^2) - R^2 + 2.\overline{IO}^2 - 4.\overline{IS}^2 = 0.$$

La formule (2) donne immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème III. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans un cercle et circonscrit à une conique :*

1° *Le centre du cercle des neuf points de ce triangle décrit un cercle concentrique à la conique; par suite,*

le cercle des neuf points est tangent à deux cercles fixes concentriques;

2° *Le point de concours des hauteurs du triangle décrit une circonférence;*

3° *Le centre de gravité du triangle décrit une circonférence.*

Si l'on considère le triangle formé par les tangentes menées aux points A, B, C au cercle fixe circonscrit à ce triangle variable, on obtient un triangle qui se déplace en restant circonscrit à un cercle et inscrit dans une conique fixe. Le cercle des neuf points du triangle ABC se transforme par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant en O, dans le cercle circonscrit au nouveau triangle, et l'on obtient le théorème suivant :

Théorème IV. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit à une conique fixe et circonscrit à un cercle fixe, le cercle circonscrit à ce triangle variable est tangent à deux cercles fixes.*

Supposons, en particulier, un triangle ($\lambda\mu\nu$) qui se déplace en restant inscrit dans une conique fixe et circonscrit à un cercle concentrique à cette conique; soit (ABC) le triangle formé par les points de contact des côtés du premier; les deux cercles concentriques qui forment l'enveloppe du cercle des neuf points du triangle ABC se transforment ici en deux cercles concentriques formant l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ($\lambda\mu\nu$).

On a donc le théorème suivant :

Théorème V. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit à une conique et circonscrit à un cercle concentrique à la conique, le cercle circonscrit à ce triangle est de rayon constant.*

Ce théorème a été énoncé par Steiner.

Théorème VI. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit à un cercle O et circonscrit à un cercle de centre C, si l'on considère la conique ayant pour centre le point C et passant par les trois sommets du triangle, cette conique est de grandeur invariable et ses demi-axes sont les distances du point C à la circonférence O.*

Ce théorème est la traduction analytique du précédent.

Théorème VII. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes quelconques, son centre de gravité décrit une conique homothétique à la conique dans laquelle le triangle reste inscrit.*

Ce théorème se déduit du théorème III par la projection cylindrique.

On peut le rapprocher du théorème analogue de Burnside, relatif au point de concours des hauteurs d'un triangle inscrit et circonscrit à deux coniques; mais notre théorème a des conséquences nombreuses.

Théorème VIII. — *Quand un hexagone se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, son centre de gravité décrit une conique.*

En effet, il suffit de remarquer que les diagonales de l'hexagone passent par un point fixe et que le triangle formé par les milieux de ces diagonales se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes.

Théorème IX. — *Quand un polygone dont le nombre des côtés est 3.2^p se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, son centre de gravité décrit une conique.*

Ce théorème se déduit aisément du précédent.

Théorème X. — *Quand un triangle est circonscrit à une conique et inscrit dans un cercle concentrique, la somme des carrés de ses côtés est constante.*

En effet, le centre de gravité du triangle décrit une circonférence concentrique.

Théorème XI. — *Quand un triangle est inscrit dans un cercle et circonscrit à une conique ayant pour foyer le centre du cercle :*

1° *Le point de concours des hauteurs du triangle est au deuxième foyer de la conique;*

2° *Le cercle des neuf points du triangle coïncide avec le cercle principal de la conique relatif à l'axe focal et, par conséquent, reste fixe;*

3° *La somme des carrés des côtés du triangle reste constante.*

Ce théorème se démontre facilement à l'aide des formules que nous avons données.

Théorème XII. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit à une conique* A *et circonscrit à une conique* B, *si l'on fait passer une conique par deux points fixes* P *et* Q *de la conique* B *et par les trois sommets du triangle, cette conique variable aura pour enveloppes deux coniques fixes passant par les points* P *et* Q.

Ce théorème se déduit du théorème IV par la projection conique.

Théorème XIII. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques* A *et* B, *si l'on trace une conique tangente aux trois côtés du triangle et à deux tangentes fixes* P *et* Q *de la co-*

nique A, *cette conique variable aura pour enveloppes deux coniques fixes tangentes aux deux droites* P *et* Q.

Ce théorème se déduit du précédent par la méthode des polaires réciproques.

Si, en particulier, les deux tangentes fixes P et Q sont des droites focales, le théorème précédent prend une autre forme, et l'on a le théorème que nous allons énoncer.

THÉORÈME XIV. — *Lorsqu'un triangle est inscrit à une conique* A *et circonscrit à une conique* B, *si l'on considère la conique inscrite dans le triangle et ayant pour foyer l'un des foyers* F *de* A :

1° *Cette conique variable reste tangente à deux coniques fixes ayant* F *pour foyer;*

2° *Le deuxième foyer de cette conique décrit une conique.*

THÉORÈME XV. — *Lorsqu'un triangle est inscrit à une conique* A *et circonscrit à une conique* B, *si d'un foyer* F *de* A *on abaisse des perpendiculaires sur les côtés du triangle, le cercle qui passe par les pieds de ces perpendiculaires a pour enveloppes deux cercles fixes.*

Ce théorème se déduit facilement de celui qui précède.

THÉORÈME XVI. — *Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, et que son axe focal passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle, le cercle principal correspondant à cet axe est tangent au cercle des neuf points du triangle.*

Ce théorème, dont la démonstration exige quelques développements, renferme, comme cas particulier, le théorème de Feuerbach, relatif au cercle des neuf points;

en effet, il suffit de supposer que la conique dont il s'agit dans notre théorème est l'un des cercles inscrits ou exinscrits au triangle.

Pour démontrer le théorème en question, nous donnerons une formule très facile à établir et qui est la suivante :

Si l'on considère une circonférence ayant son centre sur le grand axe d'une ellipse, à une distance d du centre de la courbe, et si cette circonférence de rayon R est circonscrite à un triangle circonscrit à l'ellipse, on a la relation suivante :

$$(\mathrm{R} - a)^2 = b^2 + d^2. \tag{3}$$

Reprenons maintenant la formule (2), qui est

$$2(a^2 + b^2) - \mathrm{R}^2 + 2d^2 - 4\overline{\mathrm{IS}}^2 = 0.$$

Les formules (2) et (3) donnent

$$\mathrm{R}^2 - 4a\mathrm{R} + 4a^2 = 4\overline{\mathrm{IS}}^2,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{R}}{2} - a = \pm \mathrm{IS}.$$

Cette dernière formule démontre le théorème énoncé.

On peut remarquer que la formule (3) indique que le cercle circonscrit à un triangle circonscrit à une ellipse, et dont le centre est sur l'axe focal, touche les deux cercles passant par les deux foyers et ayant pour centres les extrémités du petit axe.

Le théorème que nous venons de démontrer est susceptible de diverses traductions intéressantes, et qu'il est facile de faire.

Nous terminerons cette Note par l'énoncé d'un dernier théorème qu'il est plus difficile de dégager des formules que nous avons établies, et dont la démonstration présente un certain intérêt.

Théorème XVII. — *Si l'on considère une conique ayant* C *pour centre et* F *et* F' *pour foyers, si* O *est le centre et* R *le rayon d'un cercle circonscrit à un triangle circonscrit lui-même à la conique, et si l'on désigne par* S *le centre du cercle des neuf points de ce triangle, on a la relation fort simple*

$$OF.OF' = 2R.CS.$$

SUR UNE RÈGLE DE M. LAGUERRE;

Par M. Ch. VÉNARD,

Elève en Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

M. Laguerre a fait voir (même tome, p. 50) qu'un nombre a est une limite supérieure des racines positives d'une équation $f(x) = 0$ si la suite des nombres obtenus en formant le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $x - a$ ne présente que des permanences. Je dis que cette limite a est supérieure ou au moins égale à la limite fournie par la suite connue de Newton.

Soient $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}, f_m$ les coefficients du quotient et le reste de la division de

$$f(x) = A_0 x^m + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

par $x - a$. On sait qu'entre ces nombres on a les relations

$$\begin{aligned}
f_m &= af_{m-1} + A_m,\\
f_{m-1} &= af_{m-2} + A_{m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_{m-p} &= af_{m-p-1} + A_{m-p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_1 &= af_0 + A_1,\\
f_0 &= A_0.
\end{aligned}$$

Calculons les dérivées successives de $f_m(a)$. On trouve facilement, en se servant des formules précédentes, que

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f'_m &= f_{m-1} + af_{m-2} + \ldots \\ &\quad + a^{p-1}f_{m-p} + \ldots + a^{m-1}f_0, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f''_m}{1.2} &= C_1^1 f_{m-2} + C_1^2\, af_{m-3} + \ldots \\ &\quad + C_1^{p-1}\, a^{p-2}f_{m-p} + \ldots + C_1^{m-1}\, a^{m-2}f_0, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f'''_m}{1.2.3} &= C_2^2 f_{m-3} + C_2^3\, af_{m-4} + \ldots \\ &\quad + C_2^{p-1}\, a^{p-3}f_{m-p} + \ldots + C_2^{m-1}\, a^{m-3}f_0, \end{aligned}\right.$$

et l'on est ainsi amené à poser

$$(p)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f_m^{(p)}}{1.2.3\ldots p} &= C_{p-1}^{p-1} f_{m-p} + C_{p-1}^{p}\, af_{m-p-1} + \ldots \\ &\quad + C_{p-1}^{m-2}\, a^{m-p-1}f_1 + C_{p-1}^{m-1}\, a^{m-p}f_0. \end{aligned}\right.$$

Je dis que cette loi est générale. Supposons-la vraie pour la $p^{\text{ième}}$ dérivée, et démontrons qu'elle est vraie pour la $(p+1)^{\text{ième}}$. En calculant cette dérivée, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{f_m^{(p+1)}}{1.2.3\ldots p} &= C_{p-1}^{p} f_{m-p-1} + 2C_{p-1}^{p+1}\, af_{m-p-2} + 3C_{p-1}^{p+2}\, a^2f_{m-p-3} + \ldots + (m-p)C_{p-}^{m-} \\ &\quad + C_{p-1}^{p-1} f_{m-p-1} + C_{p-1}^{p-1}\, af_{m-p-2} + C_{p-1}^{p-1}\, a^2f_{m-p-3} + \ldots + C_{p-1}^{p-1}\, a^{m-p} \\ &\quad\quad + C_{p-1}^{p}\, af_{m-p-2} + C_{p-1}^{p}\, a^2f_{m-p-3} + \ldots + \ldots \\ &\quad\quad\quad + C_{p-1}^{p+1}\, a^2f_{m-p-3} + \ldots + \ldots \\ &\quad\quad\quad\quad + C_{p-1}^{m-2}\, a^{m-p} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en faisant la somme,

$$\begin{aligned} \frac{f_m^{(p+1)}}{1.2.3\ldots p} &= C_p^{p+1} f_{m-p-1} + (2C_{p-1}^{p+1} + C_p^{p+1})\, af_{m-p-2} \\ &\quad + (3C_{p-1}^{p+2} + C_p^{p+2})\, a^2f_{m-p-3} + \ldots \\ &\quad + [(m-p)C_{p-1}^{m-1} + C_p^{m-1}]\, a^{m-p-1}f_0, \end{aligned}$$

et, comme

$$2C_{p-1}^{p+1} = pC_p^{p+1},\quad 3C_{p-1}^{p+2} = pC_p^{p+2},\quad \ldots,\quad (m-p)C_{p-1}^{m-1} = pC_p^{m-1},$$

on a, en divisant par $(p+1)$,

$$(p+1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f_m^{(p+1)}}{1.2.3\ldots p(p+1)} = C_p^p f_{m-p-1} + C_p^{p+1} a f_{m-p-2} + \ldots \\ + C_p^{m-1} a f_0, \end{aligned} \right.$$

. . . . ,

$$(m-2)\quad \frac{f_m^{(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)} = C_{m-3}^{m-3} f_2 + C_{m-3}^{m-2} a f_1 + C_{m-3}^{m-1} a^2 f_0,$$

$$(m-1)\quad \frac{f_m^{(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-2)(m-1)} = C_{m-2}^{m-2} f_1 + C_{m-2}^{m-1} a f_0,$$

$$(m)\quad \frac{f_m^{(m)}}{1.2.3\ldots(m-1)m} = C_{m-1}^{m-1} f_0.$$

Sous ces formes, on voit que, si un nombre a rend positifs les termes de la suite $f_m, f_{m-1}, \ldots, f_1, f_0$, ce nombre rendra aussi positifs les termes de la suite de la fonction et de ses dérivées $f'_m, f''_m, \ldots, f_m^{(m)}$, c'est-à-dire que la limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, limite fournie par la considération de la suite de M. Laguerre, s'appliquera à la suite de Newton.

Réciproquement, la limite donnée par la suite de Newton rend-elle positifs les termes de la suite des fonctions $f_m, f_{m-1}, \ldots, f_1, f_0$? En d'autres termes, les deux limites fournies par l'une et l'autre méthode sont-elles égales? Démontrons que, en général, il n'en est pas ainsi. Pour cela, calculons les fonctions $f_m, f_{m-1}, \ldots, f_{m-p}, f_1, f_0$ au moyen des formules établies plus haut. De la dernière on tire $f_0 = \frac{f_m^{(m)}}{1.2.3\ldots m}$. Nous désignerons, pour abréger, $\frac{f_m^{(m)}}{1.2\ldots m}$ par $f'^{(m)}_m$, et en général $\frac{f_m^{(p)}}{1.2.3\ldots p}$ par $f'^{(p)}_m$.

On trouve ainsi, en calculant de proche en proche,

$$f_0 = f_m^{(m)},$$
$$f_1 = f_m^{(m-1)} - C_{m-2}^{m-1} a f_m^{(m)},$$
$$f_2 = f_m^{(m-2)} - C_{m-3}^{m-2} a f_m^{(m-1)} + C_{m-3}^{m-1} a^2 f_m^{(m)},$$

et l'on démontre facilement que l'on a, en général,

$$f_{m-p} = f_m^{(p)} - C_{p-1}^{p} a f_m^{(p+1)} + C_{p-1}^{p+1} a^2 f_m^{(p+2)} - \ldots \pm C_{p-1}^{m-1} a^{m-p} f_m^{(m)},$$

. . . . ,

$$f_{m-2} = f''_m - C_1^2 a f'''_m + C_1^3 a^2 f^{\text{IV}}_m - \ldots \pm C_1^{m-1} a^{m-2} f_m^{(m)},$$
$$f_{m-1} = f'_m - C_0' a f''_m + C_0^2 a^2 f'''_m - \ldots \mp C_0^{m-1} a^{m-1} f_m^{(m)},$$
$$f_m = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Sous ces formes, on voit que, si le nombre a rend positives la fonction f_m et ses dérivées, il ne s'ensuit pas nécessairement que a rende positives les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_{m-p}, \ldots, f_{m-1}$. Par exemple, si nous prenons la deuxième de ces fonctions, f_1, qui est égale à $A_0 a + A_1$, par hypothèse, $f_m^{(m-1)} = \dfrac{m A_0 a + A_1}{1.2\ldots(m-1)}$ et $f_m^{(m)} = \dfrac{A_0}{1.2\ldots m}$ sont positives; il ne résulte pas nécessairement que $A_0 a + A_1$ soit positif.

Donc, en général, la limite supérieure des racines positives d'une équation fournie par la règle de Newton est plus petite que la limite fournie par la règle de M. Laguerre.

APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE PLANE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

Voici quelques nouvelles applications élémentaires des principes si élégants et si féconds de la Géométrie

cinématique, qui, réunis en corps de doctrine par M. Mannheim, constituent aujourd'hui, grâce à l'éminent professeur, une branche importante de la science géométrique ([1]). Au moyen de ces principes, je suis arrivé, dans différentes recherches élémentaires, à plusieurs résultats nouveaux qui se trouvent consignés dans cette Note. Après un problème sur la parabole, les questions que je traite ici se rapportent au centre de courbure de l'ellipse, au point où la droite de Simson touche son enveloppe, à la cissoïde, à la strophoïde, à la conchoïde, à la spirale d'Archimède, aux caustiques, aux anamorphoses et aux podaires.

I. — Question sur la parabole.

L'un des côtés d'un angle droit dont le sommet décrit une droite enveloppe une parabole dont l'axe est perpendiculaire à cette droite : trouver l'enveloppe de l'autre côté de cet angle.

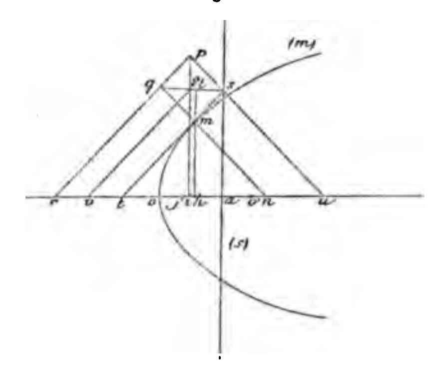
Soient (s) la droite que décrit le sommet s (*fig.* 1), (m) la parabole enveloppée par le côté st qui la touche au point m, su le côté dont nous cherchons l'enveloppe. Remarquons d'abord que cette enveloppe a évidemment pour axe de symétrie l'axe de la parabole donnée. Cherchons maintenant, pour la position considérée, la normale à l'enveloppe de su. La normale à la trajectoire du point s est la perpendiculaire sq à (s); la normale mn à la parabole (m) coupe sq en q; du point q abaissons sur su la perpendiculaire qp; su touche son enveloppe au point p, et pq est la normale à cette enveloppe; pq coupe l'axe en r; du point p abaissons sur cet axe la

---

([1]) Voir Mannheim, *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique* (Gauthier-Villars, 1880).

perpendiculaire pi qui coupe sq en g; ri est la sous-normale à l'enveloppe cherchée, relative au point p; du

Fig. 1.



point m abaissons sur l'axe la perpendiculaire mh qui coupe sq en l; enfin, par le point g menons gv parallèlement à st. Cela fait, on voit que

$$rv = qg = ls = ha,$$

et que

$$vi = ta;$$

par suite

$$ri = rv + vi = ah + at.$$

Comme le sommet o est le milieu de la sous-tangente th, on a

$$ah + at = 2ao,$$

ou

$$ri = 2ao.$$

La sous-normale est donc constante et l'enveloppe cherchée est une parabole dont le paramètre est $2oa$. Le sommet o' de cette parabole est le milieu de la sous-tangente iu.

On établit, absolument comme nous venons de le faire pour la relation précédente, que

$$hn = 2ao'.$$

Alors le foyer de la parabole (m) est à une distance du sommet o égale à ao'; le foyer de la parabole (p), enveloppe de su, est à une distance du sommet o' égale à ao; ces deux foyers coïncident donc, et ce foyer commun f est le symétrique du point a par rapport au milieu de oo'.

On est ainsi conduit à ce théorème :

Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont respectivement tangents à deux paraboles coaxales et confocales est une droite perpendiculaire à l'axe commun et qui divise le segment compris entre les sommets en parties inversement proportionnelles aux paramètres de ces paraboles.

II. — Sur le centre de courbure de l'ellipse.

Considérons deux circonférences concentriques (m) et (p) et une droite fixe ox passant par le centre commun o (*fig.* 2); tirons les rayons om et op également inclinés sur ox.

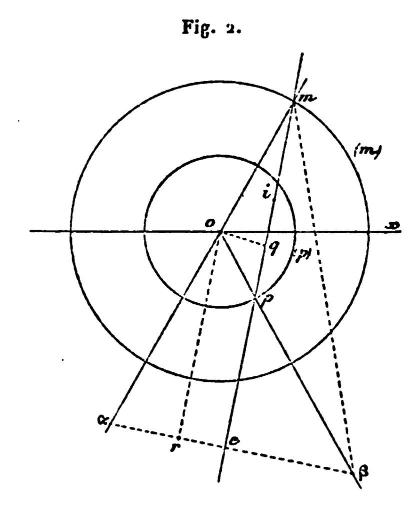
On sait, et cela est une conséquence immédiate du procédé de M. Chasles pour construire les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués, que le milieu i de mp décrit, lorsque les droites om et op varient, une ellipse (i) ayant o pour centre et un axe dirigé suivant ox, que la somme des axes de cette ellipse est égale à om et leur différence à op, que mp est normale à cette ellipse, enfin que les segments mi et pi sont tous deux égaux au demi-diamètre conjugué du diamètre oi dans l'ellipse (i).

Pour avoir le centre de courbure de l'ellipse (i) relatif au point i, cherchons donc le point où mp touche son enveloppe. Soit e ce point; la perpendiculaire à mp au point e coupe en α la normale mo au lieu que dé-

crit le point m et en β la normale po au lieu que décrit le point p.

Si nous représentons par $d(m)$ et $d(p)$ deux déplace-

Fig. 2.



ments infiniment petits correspondants des points m et p respectivement sur les circonférences (m) et (p), nous avons (¹)

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{m\alpha}{p\beta}.$$

Mais, les angles xom et xop étant constamment égaux entre eux, on a

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{om}{op};$$

donc

$$\frac{m\alpha}{p\beta} = \frac{om}{op} \quad \text{ou} \quad \frac{m\alpha}{om} = \frac{p\beta}{op}.$$

Du point o abaissons sur mp la perpendiculaire oq et

(¹) MANNHEIM, Ouvrage cité, p. 204.

sur $\alpha\beta$ la perpendiculaire or. Nous avons

$$\frac{p\beta}{op}=\frac{e\beta}{re}=\frac{e\beta}{oq}.$$

Mais

$$\frac{m\alpha}{om}=\frac{e\alpha}{oq};$$

donc

$$\frac{e\beta}{oq}=\frac{e\alpha}{oq} \quad \text{ou} \quad e\beta=e\alpha;$$

par suite,

$$\widehat{\beta me}=\widehat{\alpha me},$$

d'où la construction :

Pour avoir le centre de courbure relatif au point i de l'ellipse (i), je porte sur la normale au point i, de part et d'autre de ce point, les longueurs im et ip, toutes deux égales au demi-diamètre conjugué du diamètre io. Je tire la ligne $m\beta$ faisant avec la normale mp un angle égal à l'angle omp; $m\beta$ coupe op au point β; du point β j'abaisse sur mp la perpendiculaire βe; le pied e de cette perpendiculaire est le centre de courbure cherché.

Si donc on connaît deux diamètres conjugués d'une ellipse, on obtiendra facilement, par cette construction, les centres de courbure relatifs aux extrémités de ces diamètres, sans qu'il soit besoin de déterminer les axes de cette ellipse.

La construction précédente peut être modifiée en partant de cette remarque, faite plus haut, que om est égale à la somme des axes de l'ellipse (i) et op à leur différence.

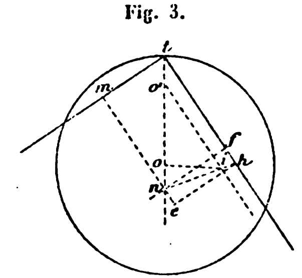
On voit facilement que les points e et q sont conju-

gués harmoniques par rapport aux points m et p, ce qui constitue un théorème de M. Chasles [1].

Problème. — *Trouver le centre de courbure de l'ellipse considérée comme enveloppe d'un côté d'un angle droit dont le sommet parcourt une circonférence, l'autre côté passant par un point fixe* [2].

Soient f (*fig.* 3) le point fixe autour duquel pivote le

Fig. 3.



côté tf de l'angle droit mth, et o le centre de la circonférence que décrit le sommet t.

La normale to au lieu de t coupe en n la normale fn à l'enveloppe de tf. Du point n abaissons sur l'autre côté de l'angle droit la perpendiculaire nm; le côté tm touche son enveloppe au point m et la normale en ce point est mn.

Remarquons, en passant, que de cette construction résulte le théorème suivant :

La droite qui joint les projections d'un foyer d'une ellipse sur la tangente et sur la normale en un point de cette courbe passe par le centre de l'ellipse.

---

(1) *Journal de Liouville*, 1re série, t. X, p. 208.
(2) Gilbert, *Méc. anal.*, p. 61, ex. 5.

On voit facilement que le théorème est également vrai pour l'hyperbole et la parabole.

Cela posé, avant de déterminer le centre de courbure relatif au point m, c'est-à-dire le point où mn touche son enveloppe, cherchons la normale au lieu que décrit le point n. Soit nh cette normale. Considérons alors le triangle fnt.

Le point f étant fixe, la perpendiculaire fn à tf coupant en n la normale to au lieu décrit par t, et la perpendiculaire fh à nf coupant en h la normale nh au lieu décrit par n, on a

$$\frac{d(t)}{d(n)} = \frac{tn}{nh}.$$

Mais o étant le point où tn touche son enveloppe et oi la normale à cette enveloppe, on a aussi

$$\frac{d(t)}{d(n)} = \frac{to}{ni}.$$

Donc

$$\frac{tn}{nh} = \frac{to}{ni} \quad \text{ou} \quad \frac{ni}{nh} = \frac{ot}{nt}.$$

Par le point i menons io' parallèlement à tf; nous avons

$$\frac{ni}{nh} = \frac{no'}{nt}.$$

Il en résulte que $no' = ot$. Le point i est ainsi déterminé, et par suite la normale nh.

Considérons alors le triangle mtn. Le côté tm touche son enveloppe au point m, le côté tn au point o et le côté mn au point e, centre de courbure cherché. De plus, mn est la normale au lieu décrit par m, to la normale au lieu décrit par t, nh la normale au lieu décrit par n; nous avons donc, en appelant h_1 le point où la

perpendiculaire à *mn* en *e* coupe *hn*,

$$\frac{d(n)}{d(m)} = \frac{nh_1}{me},$$

$$\frac{d(t)}{d(n)} = \frac{to}{ni},$$

$$\frac{d(m)}{d(t)} = \frac{me}{tn}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient

$$1 = \frac{nh_1 \; to}{ni . tn} = \frac{nh_1 . no'}{ni . nt}$$

ou

$$\frac{nh_1}{ni} = \frac{nt}{no'},$$

ce qui montre que le point h_1 coïncide avec le point *h*.

La construction du point *e* sera donc la suivante :

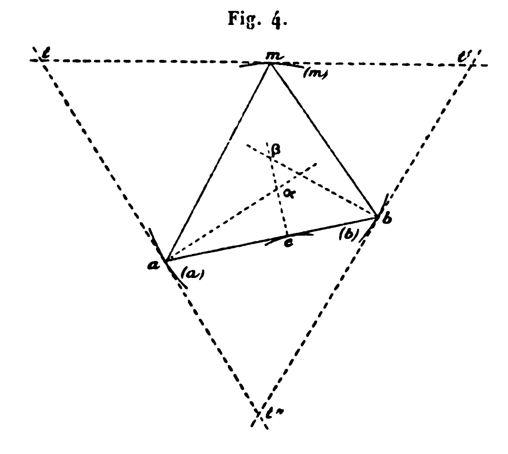
Une fois la normale mn tracée, on porte sur to la longueur no' = ot ; par le point o on mène la droite oi perpendiculairement à ot, et par o' la droite o'i parallèlement à th ; ces droites se coupent en i ; on tire ni qui rencontre tf en h ; enfin, de h on abaisse sur mn la perpendiculaire he : le point e est le centre de courbure cherché.

III. — Sur le point où la droite de Simson touche son enveloppe.

Question préliminaire. — *Un triangle variable amb se déplace de façon que ses sommets décrivent des courbes données (a), (m) et (b), et que ses côtés ma et mb restent constamment parallèles à des directions données : déterminer le point où le côté ab touche son enveloppe (fig. 4).*

Soit e le point où ab touche son enveloppe; la normale à cette courbe au point e coupe en α et β les normales $a\alpha$ et $b\beta$ aux courbes (a) et (b). Soient, de plus,

Fig. 4.



t, t' et t'' les points où se coupent deux à deux les tangentes aux courbes (a), (m) et (b) aux points a, m et b.

D'après un principe de Géométrie cinématique ([1]), on a, en représentant par $d(a)$, $d(b)$ et $d(m)$ des déplacements infiniment petits correspondants des points a, b et m sur leurs trajectoires,

(1) $$\frac{d(a)}{d(m)} = \frac{at}{mt},$$

(2) $$\frac{d(m)}{d(b)} = \frac{mt'}{bt'},$$

et

(3) $$\frac{d(b)}{d(a)} = \frac{bt''.be}{at''.ae},$$

ou, d'après le principe dont nous avons fait usage dans

([1]) MANNHEIM, Ouvrage cité, p. 208.

le paragraphe précédent,

$$(3') \qquad \frac{d(b)}{d(a)} = \frac{b\beta}{a\alpha}.$$

Multiplions membre à membre les égalités (1), (2) et (3); il vient

$$1 = \frac{at.mt'.bt''.be}{mt.bt'.at''.ae}$$

ou

$$(4) \qquad \frac{ae}{be} = \frac{at.mt'.bt''}{mt.bt'.at''}.$$

Multiplions maintenant membre à membre les égalités (1), (2) et (3'); il vient

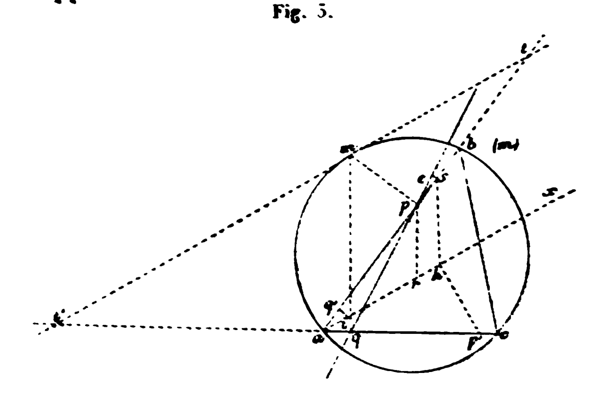
$$1 = \frac{at.mt'.b\beta}{mt.bt'.a\alpha}$$

ou

$$(4') \qquad \frac{a\alpha}{b\beta} = \frac{at.mt'}{mt.bt'}.$$

Des formules (4) et (4') résultent, pour le point e, deux procédés de détermination différents. Cela posé, cherchons le point où la droite de Simson touche son enveloppe.

Fig. 5.



1° Soit abc le triangle considéré (*fig.* 5). D'un point

quelconque m pris sur la circonférence (m) circonscrite à ce triangle, abaissons les perpendiculaires mp et mq sur les côtés ab et ac, et cherchons le point où la droite pq touche son enveloppe.

Dans le triangle mpq, le sommet m décrit la circonférence (m); le sommet p, la droite ab; le sommet q, la droite ac; de plus, les côtés mp et mq se déplacent parallèlement à eux-mêmes, puisqu'ils sont constamment perpendiculaires, l'un à la droite ab, l'autre à la droite ac. Appliquons donc au triangle mpq la formule (4) établie précédemment; pour cela, menons à la circonférence (m) la tangente au point m, qui coupe ab en t et ac en t'. Nous avons

$$\frac{qe}{pe} = \frac{qt'.mt.pa}{mt'.pt.qa}.$$

Mais

$$\frac{qt'}{mt'} = \cos\widehat{mt'q}$$

et

$$\frac{pt}{mt} = \cos\widehat{mtp};$$

donc

$$\frac{qe}{pe} = \frac{pa.\cos\widehat{mt'q}}{qa.\cos\widehat{mtp}}.$$

Nous déduisons de cette relation la construction suivante du point e :

Par le sommet a, menons à la tangente tt' la parallèle ax; portons respectivement sur ab et sur ac les longueurs $aq' = aq$ et $ap' = ap$; des points q' et p' abaissons sur ax les perpendiculaires $q'i$ et $p'h$, qui rencontrent ax aux points i et h; portons sur ax la longueur $hr = ia$; tirons pr; par le point h, menons à pr la parallèle hs, qui coupe ab au point s; enfin, par le

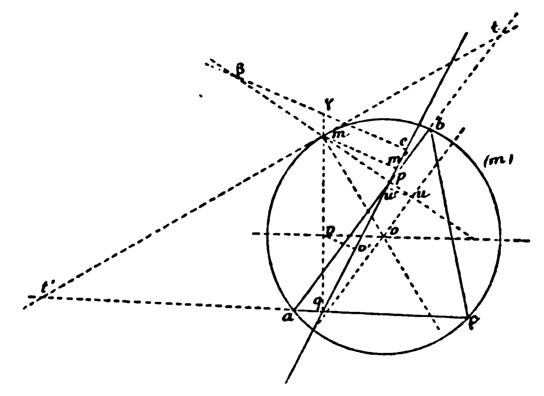
point s, menons à ac la parallèle se, qui coupe pq au point e : e est le point cherché.

Nous avons, en effet,

$$\frac{qe}{pe} = \frac{as}{ps} = \frac{ah}{rh} = \frac{ah}{ai} = \frac{p'a.\cos\widehat{p'ax}}{q'a.\cos\widehat{q'ax}} = \frac{pa.\cos\widehat{mt'q}}{qa.\cos\widehat{mtp}}.$$

2° Appliquons maintenant la formule (4'). La per-

Fig. 6.



pendiculaire $\beta\gamma$ à pq, au point e cherché, coupe mp en β et mq en γ (*fig.* 6). Nous avons alors

$$\frac{q\gamma}{p\beta} = \frac{qt'.mt}{mt'.pt}$$

ou, d'après ce qui a déjà été vu,

$$\frac{q\gamma}{p\beta} = \frac{\cos\widehat{mt'q}}{\cos\widehat{mtp}}.$$

Joignons le point m au centre o de la circonférence (m); la droite mo étant perpendiculaire à tt', nous avons

$$\widehat{mt'q} = \widehat{omq} \quad \text{et} \quad \widehat{mtp} = \widehat{omp}.$$

Donc

$$\frac{q\gamma}{p\beta} = \frac{\cos\widehat{omq}}{\cos\widehat{omp}}.$$

Par le point o menons à ab et à ac les parallèles ou et ov qui coupent mp et mq en u et en v à angle droit. Alors

$$\frac{mv}{mu} = \frac{mo.\cos\widehat{omq}}{mo.\cos\widehat{omp}} = \frac{q\gamma}{p\beta}.$$

Mais

$$q\gamma = \frac{qe}{\cos\widehat{mqe}} \quad p\beta = \frac{pe}{\cos\widehat{mpe}};$$

par suite

$$\frac{mv}{mu} = \frac{qe.\cos\widehat{mpe}}{pe.\cos\widehat{mqe}}$$

ou

$$\frac{qe}{pe} = \frac{mv.\cos\widehat{mqe}}{mu.\cos\widehat{mpe}}.$$

Des points m, u et v abaissons sur pq les perpendiculaires mm', uu' et vv'. Nous avons

$$m'v' = mv.\cos\widehat{mqe},$$

$$m'u' = mu.\cos\widehat{mpe}.$$

Par conséquent,

$$\frac{qe}{pe} = \frac{m'v'}{m'u'}.$$

Nous obtenons ainsi très simplement la valeur du rapport dans lequel le point e divise la droite pq, ce qui fournit une nouvelle construction facile de ce point.

(*A suivre.*)

SUR UN PROBLÈME DE DIOPHANTE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Trouver quatre nombres tels que leurs produits deux à deux, augmentés de l'unité, soient des carrés (Liv. IV, prob. XXI).

Voici une élégante solution du problème, qui détermine quatre nombres entiers en fonction de deux nombres entiers indéterminés r et s. Si l'on désigne par a, b, c, d les quatre nombres cherchés, on a

$$\begin{aligned} a &= r, \\ b &= s(rs+2), \\ c &= (s+1)(rs+r+2), \\ d &= 4(rs+1)(rs+r+1)(rs^2+rs+2s+1). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sqrt{ab+1} &= rs+1, \\ \sqrt{ac+1} &= rs+r+1, \\ \sqrt{ad+1} &= 2r^2s^2+2r^2s+4rs+2r+1, \\ \sqrt{bc+1} &= rs^2+rs+2s+1, \\ \sqrt{bd+1} &= 2r^2s^3+2r^2s^2+6rs^2+4rs+4s+1, \\ \sqrt{cd+1} &= 2r^2s^3+4r^2s^2+6rs^2+2r^2s+8rs+4s+2r+3. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $r=1$ et $s=2$, on a

$$a=1, \quad b=8, \quad c=15, \quad d=528$$

et

$$\begin{aligned} &1.8+1=3^2, \quad &1.15+1=4^2, \quad &1.528+1=23^2, \\ &8.15+1=11^2, \quad &8.528+1=65^2, \quad &15.528+1=89^2. \end{aligned}$$

Existe-t-il un cinquième nombre e tel que $ae+1$, $be+1$, $ce+1$, $de+1$ soient des carrés?

Il y aurait lieu d'obtenir des formules analogues en remplaçant dans le problème précédent $+1$ par -1, et de compléter ainsi le problème résolu à la page 323 du Tome X des *Nouvelles Annales* (2e série, 1871).

La solution précédente m'a été adressée dernièrement de Gothembourg par M. Boije af Gennäs.

NOTE SUR LA CONSTRUCTION DES NORMALES A L'ELLIPSE (1);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Les solutions indiquées ici peuvent être résumées et améliorées de la façon suivante. Désignons par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation d'une ellipse *tracée*, et par x_0, y_0 les coordonnées d'un point P d'où l'on abaisse les normales. Les perpendiculaires abaissées du sommet A de coordonnées $(a, 0)$ sur les normales issues du point P rencontrent la courbe en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 situés sur une circonférence dont l'équation est

$$x^2+y^2-2\frac{x}{a}\frac{a^2x_0^2-b^2y_0^2}{c^2} -4\frac{ax_0y_0}{c^2}y+2\frac{a^2x_0^2+b^2y_0^2}{c^2}-a^2=0.$$

La puissance du sommet A par rapport à cette circonférence a pour expression $\left(\frac{2by_0}{c}\right)^2$, et celle du sommet A'

---

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 348, et t. XV, p. 5.

a pour expression $\left(\frac{2ax_0}{c}\right)^2$. Il suffit donc de tracer une circonférence dont l'ordonnée du centre égale $2\frac{ax_0y_0}{c^2}$, et qui coupe orthogonalement les circonférences décrites des sommets A et A' comme centres avec des rayons égaux à $\frac{2by_0}{c}$ et $\frac{2ax_0}{c}$. Cette circonférence coupe l'ellipse en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 au plus; on obtient les normales en abaissant du point P des perpendiculaires sur les quatre droites AM_1, AM_2, AM_3 et AM_4.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Talayrach, capitaine d'Artillerie (1).

J'ai l'honneur de vous envoyer ci-joint une démonstration géométrique du théorème de Poncelet sur les polygones qui sont à la fois inscrits à une circonférence et circonscrits à une autre. Ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Étant données deux circonférences, si l'on prend un point a_1 sur l'une d'elles et que l'on mène les tangentes successives a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{n-1}a_n$ à la deuxième, la droite a_1a_n qui ferme le polygone enveloppe un cercle coradical aux deux cercles donnés.

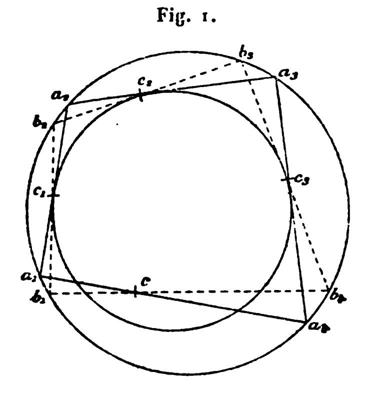
La démonstration qu'en a donnée Poncelet s'appuie sur des calculs assez longs; je ne sais s'il en a été donné une purement géométrique. En tout cas, je vous livre la

(1) Cette Lettre, qui porte la date du 24 mars 1875, et qui malheureusement avait été égarée, est antérieure à l'étude *Sur la strophoïde*, publiée en 1875 par M. Maleyx. CH. B.

mienne en vous laissant libre de la publier si vous le croyez utile.

Solution. — Supposons menées (*fig.* 1) les trois tan-

Fig. 1.



gentes successives a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4 et la corde a_4a_1. Pour trouver le point de contact de cette corde avec son enveloppe, prenons sur la première circonférence un point b_1 infiniment voisin de a_1 et menons, en partant de ce point, les tangentes successives b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4 et la corde b_4b_1. J'appelle c_1, c_2, c_3 les points d'intersection des droites (a_1a_2, b_1b_2), (a_2a_3, b_2b_3), (a_3a_4, b_3b_4), et C le point d'intersection des cordes (a_4a_1, b_4b_1).

A la limite, les points c_1, c_2, c_3 sont les points de contact des tangentes avec le cercle, et le point C le point de contact de la corde avec son enveloppe.

Or les triangles semblables $a_\alpha b_\alpha c_\alpha$, $a_{\alpha+1}b_{\alpha+1}c_{\alpha+1}$ donnent

$$\frac{a_1b_1}{a_2b_2}=\frac{a_1c_1}{b_2c_1},$$

$$\frac{a_2b_2}{a_3b_3}=\frac{a_2c_2}{b_3c_2},$$

$$\frac{a_3b_3}{a_4b_4}=\frac{a_3c_3}{b_4c_3}.$$

Multipliant membre à membre et passant aux limites, en remarquant que $\lim b_2 c_1 = a_2 c_1 = a_2 c_2$, on a

$$(1) \qquad \lim \frac{a_1 b_1}{a_4 b_4} = \frac{a_1 c_1}{a_4 c_3}.$$

De son côté, la similitude des deux triangles $a_1 b_1 C$, $a_4 b_4 C$ donne la relation

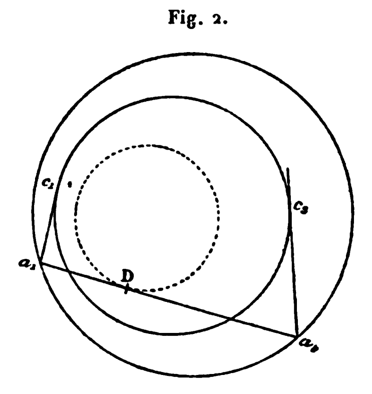
$$(2) \qquad \lim \frac{a_1 b_1}{a_4 b_4} = \frac{a_1 C}{a_4 C}.$$

Comparant (1) à (2), on a, pour déterminer la position limite du point C, la relation très-simple

$$(3) \qquad \frac{a_1 C}{a_4 C} = \frac{a \cdot c_1}{a_4 c_3}.$$

Cela posé, si nous décrivons (*fig.* 2) un cercle cora-

Fig. 2.



dical aux deux cercles donnés et tangent à la corde $a_4 a_1$, le point de contact D sera donné, d'après une propriété bien connue des cercles coradicaux, par la relation

$$(4) \qquad \frac{a_1 D}{a_4 D} = \frac{a_1 c_1}{a_4 c_3}.$$

Le point D n'est donc autre que le point C où la corde $a_4 a_1$ touche son enveloppe.

Il en résulte que, si d'un côté nous traçons les différentes cordes $a_4 a_1$, et que de l'autre nous tracions les différents cercles coradicaux qui leur sont tangents, ces deux séries de lignes auront une même enveloppe. Or deux cercles coradicaux ne peuvent avoir, en dehors des deux points fixes communs sur l'axe radical, un troisième point commun sans se confondre. Tous ces cercles se confondent donc en un seul, qui n'est autre que l'enveloppe cherchée et qui est indépendant de la position du point a_1 sur la première circonférence.

C. Q. F. D.

Nota. — Cette démonstration s'appliquerait de la même manière au cas où les droites $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, ..., $a_p a_{p+1}$ seraient tangentes, non à un cercle unique, mais à une série de cercles coradicaux.

Première conséquence. — La première conséquence de cette proposition est que, si la droite $a_n a_1$ touche la seconde circonférence donnée, tous les polygones tels que $a_1 a_2 \ldots a_n$ sont à la fois inscrits à un cercle et circonscrits à un autre.

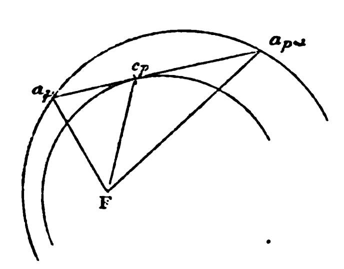
Deuxième conséquence. — Les diagonales d'ordre quelconque des polygones qui sont à la fois inscrits à un cercle et circonscrits à un autre touchent d'autres cercles coradicaux aux deux cercles donnés.

Troisième conséquence. — Si le polygone à la fois inscrit et circonscrit a un nombre pair de côtés, les diagonales qui joignent les sommets opposés passent par un même point F, qui n'est autre que le cercle coradical de rayon nul.

Quatrième conséquence. — Si $a_p a_{p+1}$ (*fig.* 3) sont deux sommets d'un de ces polygones et c_p son point de contact, Fc_p est la bissectrice de l'angle $a_p F a_{p+1}$. Par

suite, dans les polygones inscrits et circonscrits d'un nombre pair de côtés, les droites joignant les points de contact des côtés opposés concourent aussi au point F.

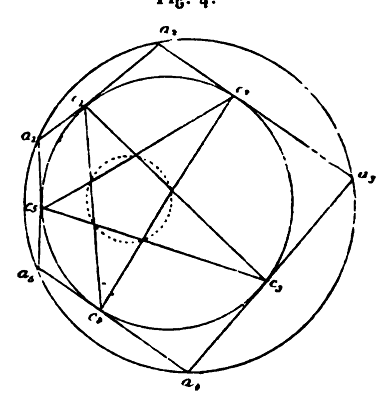
Fig. 3.



Cinquième conséquence. — De ce que la droite Fc_p est la bissectrice de l'angle $a_p F a_{p+1}$, on peut encore déduire que, dans tout polygone inscrit et circonscrit, la somme des diagonales joignant les sommets 2 à 2, 3 à 3, ..., m à m est dans un rapport constant avec le périmètre du polygone.

Sixième conséquence. — Dans tout polygone inscrit et circonscrit, les droites qui joignent 2 à 2, 3 à 3, ...,

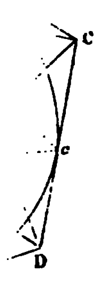
Fig. 4.



m à m (*fig.* 4) les points de contact des côtés déter-

ne

rme
ts de



crit les deux co-
agones. Les tan-
par les sommets se

et, à cause de $Pa_1 = Pa_7$, il reste

$$\frac{A_2Q}{A_8Q} = \frac{A_2a_1}{A_8a_7}.$$

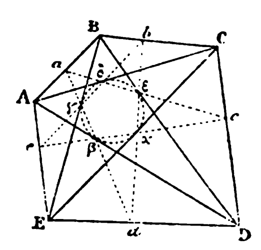
De même le triangle $P'A_2A_8$, coupé par la transversale $a_2Q'a_8$, donnerait

$$\frac{A_2Q'}{A_8Q'} = \frac{A_2a_2}{A_8a_8},$$

et, à cause de $A_2a_2 = A_2a_1$ et $A_8a_8 = A_8a_7$, on voit que Q et Q' se confondent, c'est-à-dire que les droites a_1a_7, a_2a_8 se coupent bien sur la diagonale A_2A_8. De plus, à cause de $\frac{A_2Q}{A_8Q} = \frac{A_2a_2}{A_8a_8}$, le point Q n'est autre que le point où la diagonale A_2A_8 touche le cercle enveloppe des diagonales telles que A_2A_8.

Appliquons cette proposition au pentagone inscrit et circonscrit à deux cercles. Menons les diagonales joignant les sommets 2 à 2. D'après ce qui précède, les droites *ac*, *bd* se coupent sur la diagonale BD (*fig.* 6) au

Fig. 6.



point ε, où cette diagonale touche le cercle enveloppe. De même les droites *ac*, *eb* se coupent en δ sur la diagonale AC, au point où celle-ci touche le cercle enveloppe. Donc les quatre points *a*, δ, ε, *c*, où les côtés et les diagonales touchent les deux cercles inscrits, sont en ligne

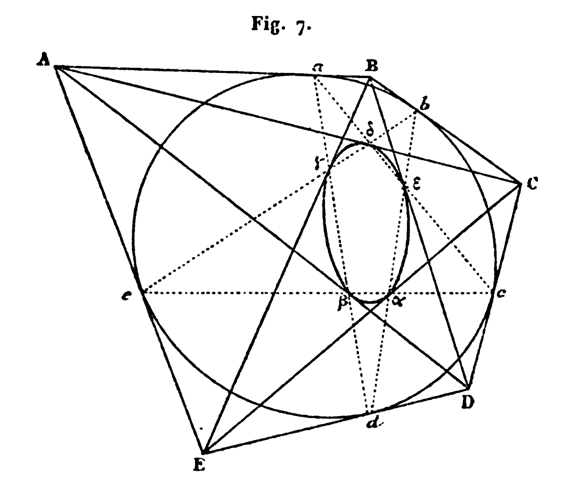
droite. De même tous les autres groupes de quatre points de contact.

Soit maintenant un pentagone *quelconque ;* nous pouvons toujours le projeter de manière que les deux coniques qui lui sont l'une inscrite et l'autre circonscrite se projettent suivant deux cercles. La conique inscrite au pentagone des diagonales se projettera aussi suivant un cercle et la proposition énoncée, vraie pour les pentagones inscrits et circonscrits à deux cercles, se trouve étendue à tous les pentagones.

Cette proposition pourrait être énoncée sous une seconde forme :

Étant donné un pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (fig. 7), on forme le pentagone abcde qui a pour sommets les points de

Fig. 7.



rencontre des côtés 2 à 2, et l'on décrit les deux coniques circonscrites à ces deux pentagones. Les tangentes menées à ces deux coniques par les sommets se coupent 4 à 4 aux mêmes points.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. A TREATISE ON SOME NEW GEOMETRICAL METHODS, containing essays on tangential coordinates, pedal coordinates, reciprocal polars, the trigonometry of the parabola, the geometrical origin of logarithms, the geometrical properties of elliptic integrals, rotatory motion, the higher geometry, and conics derived from the cone; par *James Booth*. 2 gros vol. in-8°, avec figures et planches. — Londres, Longmans, 1877. Prix : 36 shillings.

2. FORMULES ET TABLES D'INTÉRÊTS COMPOSÉS ET D'ANNUITÉS; par *F. Vintéjoux* et *J. de Reinach*. 2[e] édition, in-8°. — Paris, Calmann-Levy, 1879. Prix : 6 fr.

3. THÉORIE DES FONCTIONS ABÉLIENNES; par *Ch. Briot*. In-8°. — Paris, Gauthier-Villars, 1879. Prix : 15 fr.

4. THÉORIES ET QUESTIONS POUVANT SERVIR DE COMPLÉMENT A UN COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ET FOURNIR DES EXERCICES AUX CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT; par *L. Maleyx*, professeur au Collège Stanislas. In-8°. — Paris, chez l'auteur, 212, rue Saint-Jacques; 1879. Prix : 15 fr.

5. COURS DE CALCUL INFINITÉSIMAL; par *J. Hoüel*, professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. T. III. In-8°. — Paris, Gauthier-Villars, 1880. Prix : 10 fr.

APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE PLANE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

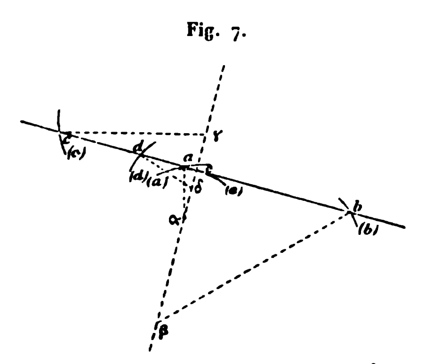
[SUITE (¹).]

IV. — SUR LES COURBES CLASSIQUES DU TROISIÈME ORDRE.

Nous allons donner une *construction commune* de la normale en un point de l'une quelconque des courbes classiques du troisième ordre : *cissoïde, strophoïde* et *conchoïde*.

Établissons d'abord une formule, qui est d'une application fréquente. Une droite mobile coupe quatre courbes fixes (a), (b), (c) et (d) aux points a, b, c et d de façon que $\frac{ab}{cd} = \frac{m}{n}$, le rapport $\frac{m}{n}$ étant constant (*fig.* 7). Soit e le point où la droite mobile touche son enve-

Fig. 7.



loppe (e); menons la normale à cette enveloppe en ce point; elle coupe respectivement en α, β, γ et δ les nor-

(¹) *Voir* même tome, p. 264.

males en a, b, c et d aux courbes (a), (b), (c) et (d). M. Mannheim a démontré[1] que, si Δab et Δcd représentent les variations de longueur des segments ab et cd pour un déplacement infiniment petit de la droite mobile, et $\Delta\theta$ l'angle de contingence de (e), on a

$$\frac{\Delta ab}{\Delta\theta} = \alpha\beta, \quad \frac{\Delta cd}{\Delta\theta} = \gamma\delta;$$

par suite

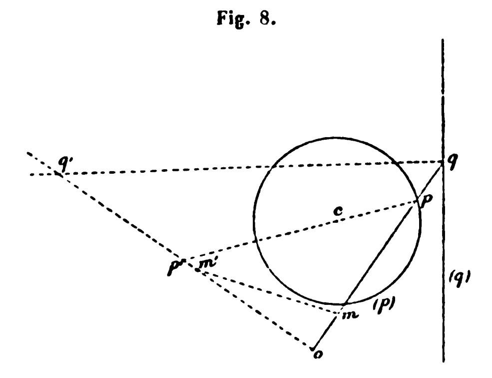
$$\frac{\Delta ab}{\Delta cd} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$$

et

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = \frac{m}{n}.$$

Cela posé, considérons dans un plan un point o, une circonférence (p) et une droite (q) quelconques (*fig.* 8).

Fig. 8.



Autour de o faisons pivoter une sécante qui coupe la circonférence p en (p) et la droite (q) en q. Portons $om = pq$ et cherchons la normale au lieu que décrit le point m, pour la position considérée.

La perpendiculaire à oq en o, qui est la normale à l'enveloppe de cette droite, coupe en p' et en q' les nor-

(1) *Loc. cit.*, p. 203.

males à la circonférence (q) et à la droite (p) en p et q. Comme $om = pq$, on a, d'après ce qui vient d'être vu, la normale au lieu de m en portant $om' = p'q'$ et en tirant $m'm$.

Si le point o est sur la circonférence (p) et si la droite (q) est tangente à cette circonférence, le lieu du point m est une *cissoïde*.

Si le point o est sur la circonférence (p) et si la droite (q) passe par le centre c de cette circonférence, le lieu du point m est une *strophoïde*, ayant pour point double le point o et pour asymptote la droite (q).

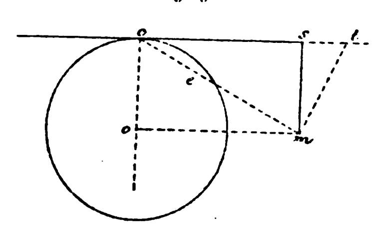
Enfin, si le point o est au centre de la circonférence (p) et si la droite (q) est tangente à cette circonférence, le lieu du point m est une *conchoïde* de la droite (q) par rapport au point o.

En appliquant à chacun de ces trois cas la solution générale donnée plus haut, on obtient la normale à chacune des courbes correspondantes.

V. — Sur la spirale d'Archimède.

Un côté sc (fig. 9) d'un angle droit roule sur un cercle de centre o; l'autre côté sm est égal au rayon

Fig. 9.



du cercle; le point m décrit une spirale d'Archimède : trouver la normale et le centre de courbure (1).

(1) Gilbert, Ouvrage cité, p. 60, ex. 3.

Rappelons le théorème de Descartes :

Lorsqu'une ligne roule sur une autre ligne, sans glissement, dans une position quelconque, la normale à la courbe décrite par un point fixe de la première ligne passe par le point de contact des deux lignes considérées.

De là résulte immédiatement que la normale demandée est la droite *mc*.

Considérons maintenant le triangle variable *scm*. La normale au lieu décrit par *c* est *co*; la normale au lieu décrit par *s*, qui est la développante du cercle considéré, est *sc*, et *c* est le centre de courbure correspondant; la normale au lieu décrit par *m* est *mc*. De plus, *sc* touche son enveloppe au point *c*, *ms* au point *s*, car *ms* est tangente à la développante sur laquelle se meut *s*.

Menons alors la tangente à la courbe décrite par *m*, c'est-à-dire la perpendiculaire *mt* à *mc*, qui coupe *cs* en *t*. Nous avons, en appelant *e* le centre de courbure cherché, c'est-à-dire le point où *mc* touche son enveloppe,

$$\frac{d(c)}{d(s)} = \frac{co}{sc},$$

$$\frac{d(s)}{d(m)} = \frac{sc}{mc},$$

$$\frac{d(m)}{d(c)} = \frac{me.mt}{ce.ct}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient

$$1 = \frac{me.mt.co}{ce.ct.mc} = \frac{me.\overline{mt}^2}{ce.\overline{ct}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{mc}{ec} = \frac{\overline{ct}^2}{\overline{mt}^2}.$$

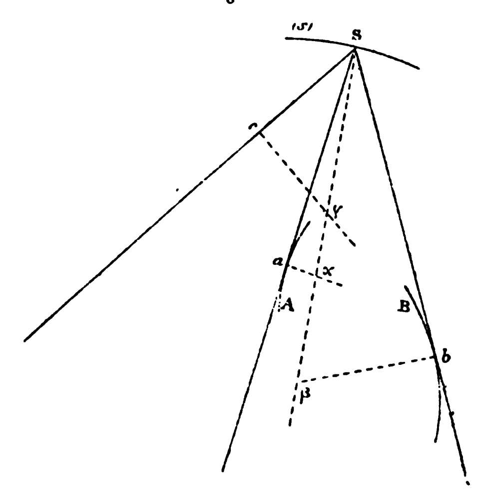
Le point e est donc symétrique, par rapport au milieu du côté mc, du pied de la droite symétrique de la mé-

diane issue du sommet t par rapport à la bissectrice issue du même sommet.

VI. — Sur les caustiques.

Considérons un angle variable *asb* dont le sommet décrit la courbe (s), les côtés *sa* et *sb* enveloppant respectivement les courbes A et B (*fig.* 10). Dans chacune

Fig. 10.



des positions de cet angle, tirons la droite *sc* faisant avec *sa* un angle égal à l'angle *asb*, et cherchons à construire la normale à l'enveloppe de *sc*.

Les normales à A et à B en *a* et *b* coupent aux points α et β la normale à (s) en s. Soit γ le point où la normale cherchée rencontre $s\alpha$. Si φ est la valeur de l'angle *asb*, on a, pour un déplacement infiniment petit de l'angle mobile [1],

$$\Delta\varphi = d(s)\left(\frac{1}{s\alpha} - \frac{1}{s\beta}\right).$$

---

[1] *Géom. ciném.*, p. 204.

De même, l'angle *asc* donne

$$\Delta\varphi = d(s)\left(\frac{1}{s\gamma} - \frac{1}{s\alpha}\right).$$

Il résulte de là que

$$\frac{1}{s\alpha} - \frac{1}{s\beta} = \frac{1}{s\gamma} - \frac{1}{s\alpha}$$

ou que

$$\frac{2}{s\alpha} = \frac{1}{s\beta} + \frac{1}{s\gamma},$$

c'est-à-dire que les points β et γ sont conjugués harmoniques par rapport aux points s et α.

Application aux caustiques par réflexion. — Considérons alors une courbe (s) et un point lumineux p situé dans son plan [1]. Un rayon quelconque ps issu de p se réfléchit sur (s) suivant sr tel que $\widehat{rsn} = \widehat{nsp}$, sn étant normale à (s).

L'enveloppe du rayon réfléchi sr est la caustique C de la courbe (s) par rapport au point p. Cherchons à construire la normale à cette caustique.

Soit h le point où cette normale rh rencontre sn. La normale à l'enveloppe de sp, c'est-à-dire la perpendiculaire à sp au point p, coupe sn au point n. Si donc e est le centre de courbure de la courbe (s) relatif au point s, on voit, d'après la question préliminaire, que *le point h est le conjugué harmonique du point n par rapport aux points s et e.*

Ce théorème permet d'obtenir très facilement la normale hr, surtout lorsque la courbe (s) est une circonférence, ce qui est le cas le plus ordinaire.

On voit que le théorème précédent a encore lieu pour les caustiques de surfaces en coupant la surface donnée

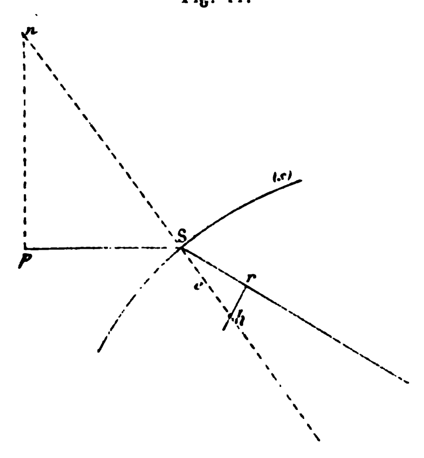
---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

par le plan mené par le point lumineux et la normale à la surface au point considéré.

Caustiques par réfraction. — Considérons la courbe (s) et le point lumineux p situé dans son plan (*fig.* 11); un rayon quelconque ps issu de p se réfracte sur (s) et


Fig. 11.



prend la direction sr. L'enveloppe de sr est la caustique par réfraction à laquelle nous allons chercher à construire la normale. La perpendiculaire à ps au point p coupe au point n la normale sn à (s). Soient de plus e le centre de courbure de (s) relatif à s, h le point où la normale cherchée rh coupe sn.

On a, comme précédemment,

$$\Delta\left(\widehat{psn}\right) = d(s)\left(\frac{1}{sn} + \frac{1}{se}\right),$$

$$\Delta\left(\widehat{hsr}\right) = d(s)\left(\frac{1}{se} - \frac{1}{sh}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\Delta\left(\widehat{psn}\right)}{\Delta\left(\widehat{hsr}\right)} = \frac{\frac{1}{se} + \frac{1}{sn}}{\frac{1}{se} - \frac{1}{sh}},$$

ou, puisque les angles $\Delta(\widehat{psn})$ et $\Delta(\widehat{hsr})$ sont infiniment petits,

$$\frac{\Delta\left(\sin\widehat{psn}\right)}{\Delta\left(\sin\widehat{hsr}\right)} = \frac{\frac{1}{sn}+\frac{1}{se}}{\frac{1}{se}-\frac{1}{sh}},$$

ou, si a est l'indice au passage du premier milieu dans le second,

$$a = \frac{\frac{1}{sn}+\frac{1}{se}}{\frac{1}{se}-\frac{1}{sh}},$$

$$\frac{a}{se}-\frac{a}{sh}=\frac{1}{sn}+\frac{1}{se},$$

$$\frac{a}{sh}+\frac{1}{sn}=\frac{a-1}{se}.$$

Le point h est ainsi déterminé, et par suite la normale hr.

La détermination est évidemment la même lorsqu'il s'agit d'une surface au lieu d'une courbe.

Remarquons enfin que, pour les caustiques de réfraction comme pour les caustiques de réflexion, le point h est le foyer conjugué du point n, considéré comme point lumineux, par rapport au cercle osculateur à la courbe (s) au point s, pris comme courbe réfractante dans un cas, comme courbe réfléchissante dans l'autre.

VII. — Sur les anamorphoses.

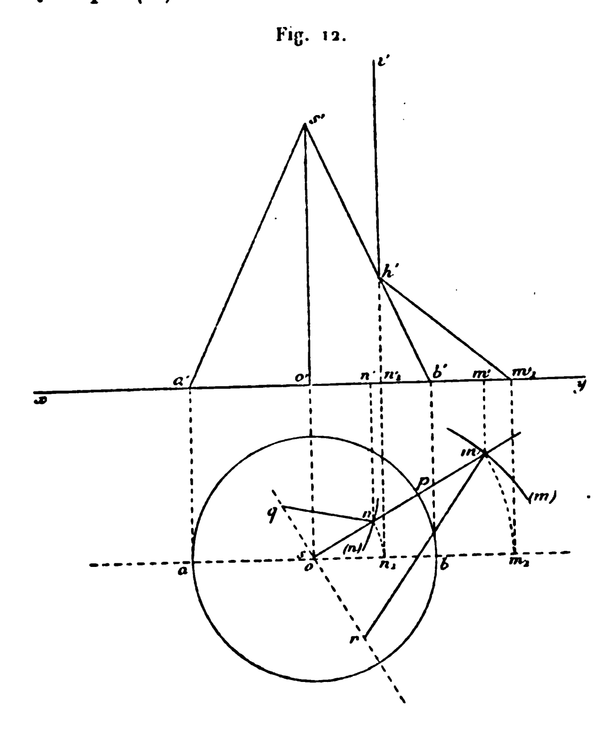
Considérons un cône circulaire droit $(sab, s'a'b')$ reposant par sa base sur le plan horizontal et une courbe (m) tracée dans ce plan (*fig.* 12).

Soit (n) l'image de (m) produite par le cône supposé poli sur sa surface externe pour un œil situé à l'infini

dans la direction de l'axe de ce cône. La courbe (m) est dite *anamorphose de la courbe* (n).

On peut se proposer de déterminer l'anamorphose (m) de façon que (n) soit une courbe donnée. Menons la sé-

Fig. 12.



cante on qui coupe la courbe (n) au point n, et rabattons-la sur ab. Le point (n, n') vient en (n_1, n'_1). Le rayon réfléchi doit donc être $h'i'$, parallèle à $s'o'$; on en déduit le rayon incident $h'm'_1$; du point (m_1, m'_1) on revient au point (m, m'). Cherchons la normale à la courbe (m) au point m. Soient q le point où la perpendiculaire à op en o coupe la normale nq à (n); r le point où oq coupe la normale cherchée.

On a, d'après un principe déjà appliqué au para-

graphe IV,

$$\frac{\Delta . mp}{\Delta . np} = \frac{ro}{qo}.$$

Mais

$$\frac{mp}{np} = \frac{m_1 b}{n_1 b} = \frac{m'_1 b'}{n'_1 b'}.$$

Or

$$\widehat{n'_1 h' b'} = \widehat{s' h' i'} = \widehat{b' h' m'_1},$$

par suite,

$$\frac{m'_1 b'}{n'_1 b'} = \frac{m'_1 h'}{n'_1 h'} = \frac{1}{\cos \widehat{n'_1 h' m'_1}}$$

ou

$$\frac{mp}{np} = \frac{1}{\cos \widehat{n'_1 h' m'_1}}.$$

Mais

$$\widehat{n'_1 h' b'} = \widehat{o' s' b}.$$

Si donc nous posons

$$\widehat{a' s' b'} = \alpha,$$

nous aurons

$$\widehat{n'_1 h' m'_1} = \alpha;$$

par conséquent,

$$\frac{mp}{np} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

et

$$\frac{\Delta . mp}{\Delta . np} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

ou

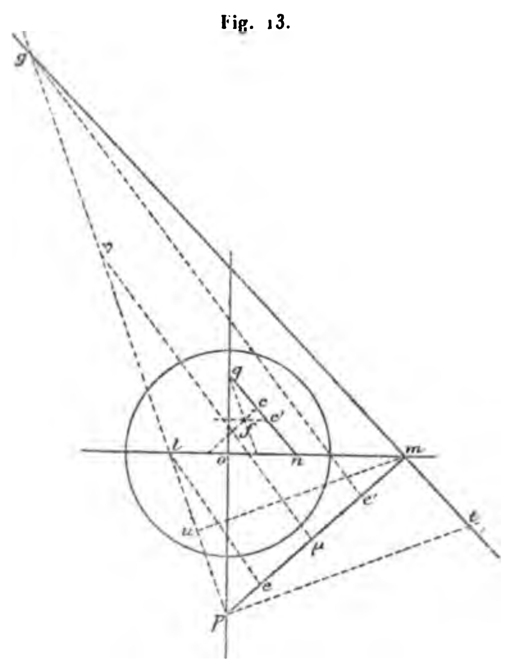
$$\frac{ro}{qo} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad ro = \frac{qo}{\cos \alpha}.$$

De plus, il est évident que les points q et r sont de part et d'autre du point o; la normale cherchée mr se trouve donc ainsi déterminée.

Cela fait, cherchons à déterminer le centre de courbure en un point de l'anamorphose (m), connaissant le centre de courbure c au point correspondant de la courbe (n) (*fig.* 13).

Construisons d'abord la normale au lieu que décrit le point de rencontre q de la normale nq au lieu de n et de la perpendiculaire oq à on. Dans le triangle rectangle onq, le sommet o est fixe, la normale au lieu du

Fig. 13.



sommet n est nq et le côté nq touche son enveloppe au point c. Nous savons, dès lors, construire la normale au lieu du sommet q (*voir* p. 271). Nous prenons $nc' = cq$; la parallèle à no menée par c' coupe en f la perpendiculaire à nq menée par c; qf est la normale demandée.

Or, nous venons de voir que, si α désigne l'angle au sommet du miroir conique, on a

$$\frac{oq}{op} = \cos\alpha.$$

Le lieu du point p est donc homothétique au lieu du

point q, et la normale pl au premier de ces lieux est parallèle à la normale qf au second.

Cela posé, cherchons le centre de courbure relatif au point m, c'est-à-dire le point e, où mp touche son enveloppe.

La tangente pt au lieu décrit par p coupe en t la tangente mt au lieu décrit par m.

Donc

$$\frac{d\,m}{d(p)} = \frac{mt.me}{pt.pe}.$$

Mais le triangle rectangle omp pivote autour de son sommet o; de plus, la normale mp au lieu décrit par m coupe en p la perpendiculaire op à om, la normale pl au lieu décrit par p coupe en l la perpendiculaire om à op; par suite,

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{mp}{pl}.$$

Par conséquent,

$$\frac{mt.me}{pt.pe} = \frac{mp}{pl},$$

d'où

$$\frac{me}{pe} = \frac{mp.pt}{pl.mt}.$$

Du point m abaissons sur pl la perpendiculaire mu; les angles mtp et mpu sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Donc

$$\frac{pt}{mt} = \frac{mp}{pu},$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{me}{pe} = \frac{\overline{mp}^2}{pl.pu}.$$

Mais, dans le triangle rectangle mpg,

$$\overline{mp}^2 = pu.pg.$$

Conséquemment

$$\frac{me}{pe} = \frac{pg}{pl},$$

d'où la construction :

On joint le milieu ν de lg au milieu μ de mp ; par le point l on mène le parallèlement à νμ : e est le point cherché.

En effet, par g menons ge' parallèlement à $\nu\mu$; nous avons

$$\frac{e'p}{ep} = \frac{gp}{lp}$$

ou, puisque μ est le milieu de ee',

$$\frac{me}{pe} = \frac{pg}{pl}.$$

VIII. — Sur les podaires.

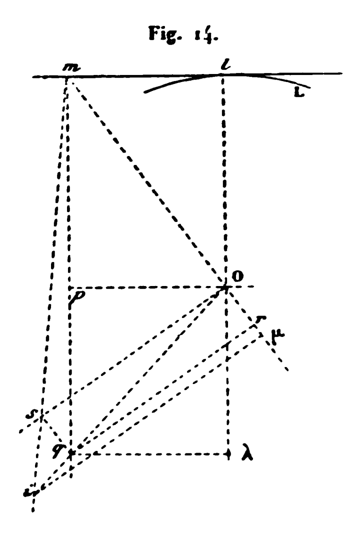
M. Mannheim donne, dans sa *Géométrie cinématique* (p. 196), un procédé pour construire le centre de courbure en un point de la podaire d'une courbe quelconque. Il emploie dans ce procédé une certaine circonférence. Je vais donner une solution tout à fait différente de la même question. La construction que je vais exposer, également très simple, n'exige absolument que l'emploi de droites.

Soient donnés le point p et la courbe L (*fig.* 14). Du point p, abaissons sur une tangente quelconque lm à la courbe L la perpendiculaire pm. Cherchons le centre de courbure de la courbe décrite par le point m pour la position considérée.

Les perpendiculaires lo à lm, po à pm se coupent en o ; mo est la normale au lieu décrit par m. Cherchons le centre de courbure situé sur cette normale, c'est-à-

dire le point μ où mo touche son enveloppe, connaissant le centre de courbure λ de la courbe L.

Fig. 14.



Remarquons d'abord que la normale oq au lieu décrit par o est déterminée par le point de rencontre q des perpendiculaires pq et λq à op et $o\lambda$, puisque les côtés de l'angle droit $po\lambda$ touchent respectivement leurs enveloppes aux points p et λ.

Considérons alors le triangle variable mol. Soit i le point où oq rencontre la perpendiculaire à mo au point μ cherché. Nous avons

$$\frac{d(m)}{d(o)} = \frac{m\mu}{oi},$$

$$\frac{d(o)}{d(l)} = \frac{qo}{l\lambda},$$

$$\frac{d(l)}{d(m)} = \frac{l\lambda}{mo}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre; il

vient

$$1 = \frac{m\mu . oq}{oi . mo}$$

ou

$$\frac{m\mu}{mo} = \frac{oi}{oq},$$

d'où la construction :

Par les points q et o menons à mo les perpendiculaires qr et os; portons sur os la longueur $os = rq$; ms coupe oq au point i; du point i abaissons sur mo la perpendiculaire $i\mu$; μ est le centre de courbure cherché.

On a, en effet, d'après cette construction,

$$\frac{m\mu}{mo} = \frac{mi}{ms} = \frac{oi}{oq}.$$

Comme application de cette règle, on a immédiatement la détermination du centre de courbure de la *cissoïde* considérée comme podaire d'une parabole par rapport à son sommet, de la *lemniscate de Bernoulli* considérée comme podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre, du *scarabée* considéré comme podaire d'une épicycloïde à quatre points de rebroussement par rapport à son centre. On sait, en effet, construire le centre de courbure de la parabole et de l'hyperbole équilatère, qui sont des coniques, et celui de l'épicycloïde à quatre points de rebroussement, puisque pour cette dernière courbe le rayon de courbure est le triple de la distance du centre à la tangente au point considéré.

DÉMONSTRATIONS DE THÉORÈMES ÉNONCÉS DANS LES NOUVELLES ANNALES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

La remarquable solution géométrique, donnée dans les *Nouvelles Annales*, de la question proposée à l'admission à l'École Polytechnique en 1878 contient les théorèmes suivants, dont l'auteur engage à rechercher les démonstrations. Voici ces théorèmes :

1. *On a un triangle isoscèle atb. On mène les deux hauteurs tc, ao; ces droites se coupent en u. On prolonge tc jusqu'en s, de façon que cs soit égale à la distance du point o à la base ab. On joint le point a au point s et le point a au point z, milieu de tu : démontrer que l'angle zas est droit* (1).

Si oh est la perpendiculaire abaissée du point o sur la base ab, on a

$$\frac{cu}{oh} = \frac{ac}{ah},$$

d'où

$$oh \times cu = \frac{\overline{oh}^2 \times ac}{ah},$$

et

$$\frac{tc}{oh} = \frac{bc}{bh},$$

d'où

$$oh \times ct = \frac{\overline{oh}^2 \times bc}{bh} = \frac{\overline{oh}^2 \times ac}{bh}.$$

(1) *Voir* 2e série, t. XVII, p. 411.

Additionnons membre à membre; il vient

$$oh(cu + ct) = \overline{oh}^2 \times ac . \frac{ah + bh}{ah \times bh}$$

ou

$$2cs \times cz = \overline{cs}^2 \times \frac{2\overline{ac}^2}{\overline{cs}^2};$$

par suite,

$$cs \times cz = \overline{ac}^2,$$

ce qui démontre que l'angle saz est droit.

2. *On a un triangle boa et les points a' et b', milieux des côtés oa, ob; on prend un point quelconque m sur la base; on a*

$$\frac{ma}{mb} = \frac{\overline{a'm}^2 - \overline{oa'}^2}{\overline{b'm}^2 - \overline{ob'}^2} \quad (^1).$$

Tirons om et projetons a' et b' en h et i sur cette droite. Si $a'b'$ coupe om en n, ce point est le milieu de om, et l'on a

$$\overline{a'm}^2 - \overline{oa'}^2 = 2om \times hn,$$

$$\overline{b'm}^2 - \overline{ob'}^2 = 2om \times in.$$

Donc

$$\frac{\overline{a'm}^2 - \overline{oa'}^2}{\overline{b'm}^2 - \overline{ob'}} = \frac{hn}{in} = \frac{na'}{nb'} = \frac{ma}{mb}.$$

C. Q. F. D.

3. *Un point d'une conique, le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en ce point et les extrémités de l'un des axes sont sur une même circonférence de cercle* (²).

(¹) T. XVII, p. 412.
(²) T. XVII, p. 413, et t. XIX, p. 7.

Soient m un point d'une conique de centre o, mt la tangente en ce point qui coupe l'axe aa' en t, i le pied de la perpendiculaire abaissée de o sur mt. Sur l'axe aa' comme diamètre je décris une circonférence, et du point m j'abaisse sur aa' la perpendiculaire mh qui coupe cette circonférence en μ et aa' en h; μt est tangente en μ à la circonférence.

Le quadrilatère $mhoi$ étant inscriptible, on a

$$tm \times ti = th \times to.$$

Mais le triangle rectangle $o\mu t$ donne

$$th \times to = \overline{t\mu}^2.$$

Donc

$$tm \times ti = \overline{t\mu}^2 = ta \times ta'.$$

Par suite, le quadrilatère $amia'$ est inscriptible.

On ferait une démonstration analogue pour les sommets b, b'.

Ce théorème nous a conduit au suivant :

Si la tangente au point m d'une conique coupe l'axe oa en t et l'axe ob en s, on a

$$\frac{st}{mt} = \frac{\overline{os}^2}{\overline{ob}^2} \quad \text{et} \quad \frac{st}{ms} = \frac{\overline{ot}^2}{\overline{oa}^2}.$$

En effet, le triangle rectangle sot donne

(1) $$\overline{os}^2 = si \times st$$

ou

$$\left(\frac{sb' + sb}{2}\right)^2 = si \times sm + si \times mt.$$

Mais, d'après le théorème précédent,

$$si \times sm = sb \times sb'.$$

Donc

$$\left(\frac{sb' + sb}{2}\right)^2 - sb \times sb' = si \times mt$$

ou

$$\left(\frac{sb' - sb}{2}\right)^2 = si \times mt,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \overline{ob}^2 = si \times mt.$$

Divisant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{\overline{os}^2}{\overline{ob}^2} = \frac{st}{mt}.$$

On établirait de même la seconde relation.

SUR UNE RÈGLE DE M. LAGUERRE;

PAR M. CANDÈZE,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

Je me propose de démontrer que la règle donnée par M. Laguerre (même Tome, p. 52) pour trouver une limite supérieure du nombre des racines supérieures à un nombre donné a fournit toujours un nombre au moins égal à celui donné par les variations de la suite de Budan et de Fourier.

Considérons l'identité d'où part M. Laguerre,

$$\frac{f(x)}{x - a} = F_0 x^{m-1} + F_1 x^{m-2} + \ldots$$
$$+ F_{m-2} x + F_{m-1} + \frac{F_m}{x - a} = f_1(x) + \frac{f(a)}{x - a},$$

et divisons de même $f_1(x)$ par $x - a$; nous aurons

$$\frac{f_1(x)}{x-a} = F'_0 x^{m-2} + F'_1 x^{m-3} + \ldots$$
$$+ F'_{m-2} + \frac{F'_{m-1}}{x-a} = f_2(x) + \frac{f_1(a)}{x-a}.$$

Cela posé, je dis que :

Lemme. — *Le nombre des variations de la suite*

(1) $$F_0,\ F_1,\ \ldots,\ F_{m-2},\ F_{m-1},\ F_m$$

est au moins égal à celui de la suite

(2) $$F'_0,\ F'_1,\ \ldots,\ F'_{m-2},\ F'_{m-1},\ F_m.$$

Pour le démontrer, remarquons d'abord que, si l'on multiplie un polynôme par $x - a$ et qu'on ajoute au produit une constante, on ne peut faire disparaître au plus qu'une des variations introduites en multipliant par $x - a$; le nombre des variations du nouveau polynôme est donc au moins égal au nombre des variations du polynôme proposé, ce qui prouve, en particulier, que le nombre des variations de la suite de M. Laguerre est toujours au plus égal au nombre des variations du polynôme.

Soient maintenant v_1, v_2 les nombres des variations des suites (1) et (2) jusqu'à F_{m-2}, F'_{m-2} inclusivement, et V_1, V_2 les nombres des variations des suites (1) et (2) complètes. On a d'ailleurs

$$F_{m-1} = -aF'_{m-2} + F'_{m-1}.$$

Supposons :

1° Qu'il n'y ait pas de variations entre F'_{m-2}, F'_{m-1} et F_m.

On sait que

$$v_1 \geq v_2.$$

Or

$$v_2 = V_2;$$

donc

$$V_1 \geq v_1 \geq v_2, \quad V_1 \geq V_2.$$

2° Qu'il y ait une variation unique dans F'_{m-2}, F'_{m-1} et F_m, et qu'elle soit entre F'_{m-2} et F'_{m-1}.

On a

$$v_1 \geq v_2.$$

D'ailleurs, en multipliant $f_2(x)$ par $x - a$, on introduit certainement une variation, car $-aF'_{m-2}$ est du signe de F'_{m-2} :

$$V_2 = v_2 + 1, \quad V_1 \geq v_1 + 1 \geq v_2 + 1, \quad V_1 \geq v_2 + 1;$$

donc

$$V_1 \geq V_2.$$

3° Que la variation soit entre F'_{m-1} et F_m.

Alors, en ajoutant au dernier terme du produit $f_2(x)(x-a)$, qui est $-aF'_{m-2}$, le terme F'_{m-1}, on pourra détruire la variation. Si on ne la détruit pas,

$$V_1 \geq v_1 + 1.$$

Or

$$V_2 = v_2 + 1;$$

donc

$$V_1 \geq V_2.$$

Si on la détruit, $-aF'_{m-2} + F'_{m-1}$ est du signe de F'_{m-1}; donc encore

$$V_1 \geq v_1 + 1,$$

d'où

$$V_1 \geq V_2.$$

4° Que F'_{m-2}, F'_{m-1}, F_m présentent deux variations :

$$V_2 = v_2 + 2.$$

En multipliant $f_2(x)$ par $x - a$ et ajoutant F'_{m-1}, on

introduit au moins une variation, et le dernier terme $-aF'_{m-2}+F'_{m-1}$ est de signe contraire à F_m :

$$V_1 \geq v_1 + 2,\ V_1 \geq V_2.$$

C. Q. F. D.

Cela posé, divisons $f_2(x)$ par $x-a$, et ainsi de suite jusqu'à $f_{m-1}(x)$ et f_m :

$$\frac{f_{m-1}(x)}{x-a} = f_m + \frac{f_{m-1}(a)}{x-a}.$$

La suite

(3) $$f_m,\ f_{m-1}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a)$$

aura, d'après ce qui vient d'être établi, au plus autant de variations que la suite de M. Laguerre. Or, cette suite n'est autre que la suite des dérivées affectées de coefficients positifs.

En effet,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m} = f_m + \frac{f_{m-1}(a)}{x-a} + \ldots + \frac{f_1(a)}{(x-a)^{m-1}} + \frac{f(a)}{(x-a)^m}.$$

Mais

$$f(x+a) = f(a) + \frac{xf'(a)}{1} + \ldots + \frac{x^{m-1}f^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{x^m f^m(a)}{1.2.3\ldots m},$$

d'où

$$\frac{f(x+a)}{x^m} = \frac{f(a)}{x^m} + \frac{f'(a)}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{f^m(a)}{1.2.3\ldots m},$$

et enfin

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m} = \frac{f^m(a)}{1.2.3\ldots m} + \frac{f^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)(x-a)} + \ldots + \frac{f'(a)}{(x-a)^{m-1}} + \frac{f(a)}{(x-a)^m}.$$

Et comme la décomposition en fractions rationnelles n'est possible que d'une seule manière, la propriété est établie.

Il suit de là que former la suite des dérivées, c'est en réalité faire une suite de divisions par $x - a$, et, comme M. Laguerre s'arrête après la première, le nombre obtenu par le procédé si simple qu'il a donné se trouve compris entre le nombre des variations du polynôme et le nombre des variations de la suite des dérivées.

On pourrait d'ailleurs s'arrêter après une quelconque des opérations.

Le nombre des variations obtenues à chaque instant est une limite supérieure du nombre des racines supérieures à a.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. CH. BIEHLER.

I.

LE NOMBRE DES INCONNUES EST ÉGAL A CELUI DES ÉQUATIONS.

Résolution et discussion d'un système de n équations linéaires à n inconnues.

1. Soient

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + K_1 = 0,\\
X_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + K_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + K_n = 0
\end{aligned}$$

les n équations linéaires entre les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Appelons Δ le déterminant des n^2 coefficients des inconnues,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et supposons $\Delta \gtrless 0$.

Multiplions les éléments de la première colonne de Δ par x_1, ceux de la deuxième par x_2, ceux de la troisième par $x_3, \ldots$, ceux de la dernière par x_n; ajoutons par lignes horizontales les éléments ainsi modifiés et substituons aux éléments de la colonne d'ordre ν dans Δ les sommes ainsi obtenues; par cette substitution le déterminant Δ sera multiplié par x_ν, et l'on aura

$$\Delta x_\nu = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu-1} & X_1 - K_1 & a_{1,\nu+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu-1} & X_2 - K_2 & a_{2,\nu+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu-1} & X_n - K_n & a_{n,\nu+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui figure dans le second membre peut être décomposé en deux autres, savoir

$$\Delta x_\nu = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu-1} & X_1 & a_{1,\nu+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu-1} & X_2 & a_{2,\nu+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu-1} & X_n & a_{n,\nu+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu-1} & K_1 & a_{1,\nu+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu-1} & K_2 & a_{2,\nu+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu-1} & K_n & a_{n,\nu+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Désignons par $\Delta_\nu(X)$ ce que devient Δ quand on remplace les éléments $a_{1,\nu}, a_{2,\nu}, \ldots, a_{n,\nu}$ de la colonne

d'ordre ν respectivement par $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et soit $\Delta_\nu(K)$ ce que devient le même déterminant Δ quand on y remplace les éléments de la même colonne par les quantités $K_1, K_2, \ldots, K_n$; l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\Delta x_\nu + \Delta_\nu(K) = \Delta_\nu(X).$$

En faisant successivement $\nu = 1$, $\nu = 2, \ldots, \nu = n$ dans cette formule, on obtiendra la série des identités

$$\begin{gathered}\Delta x_1 + \Delta_1(K) = \Delta_1(X),\\ \Delta x_2 + \Delta_2(K) = \Delta_2(X),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \Delta x_n + \Delta_n(K) = \Delta_n(X).\end{gathered}$$

Les quantités $\Delta_\nu(X)$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1, X_2, \ldots, X_n$; par suite, toute solution du système

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= 0,\\ X_2 &= 0,\\ &\ldots\ldots,\\ X_n &= 0\end{aligned}\right.$$

annule les déterminants $\Delta_\nu(X)$ et par suite satisfait au système

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta x_1 + \Delta_1(K) &= 0,\\ \Delta x_2 + \Delta_2(K) &= 0,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots,\\ \Delta x_n + \Delta_n(K) &= 0.\end{aligned}\right.$$

Inversement, dans l'hypothèse admise de $\Delta \gtrless 0$, la solution du système (2) satisfait au système (1).

Si l'on multiplie en effet la première équation du système (2) par $a_{\mu,1}$, la deuxième par $a_{\mu,2}, \ldots$, la dernière par $a_{\mu,n}$, en ajoutant membre à membre les équations obtenues, il viendra

$$\begin{aligned}&\Delta(a_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + \ldots + a_{\mu,n}x_n)\\ &\quad + a_{\mu,1}\Delta_1(K) + a_{\mu,2}\Delta_2(K) + \ldots + a_{\mu,n}\Delta_n(K) = 0\end{aligned}$$

ou bien

$$\Delta(X_\mu - K_\mu) + a_{\mu,1}\Delta_1(K) + a_{\mu,2}\Delta_2(K) + \ldots + a_{\mu,n}\Delta_n(K) = 0.$$

Mais

$$a_{\mu,1}\Delta_1(K) + a_{\mu,2}\Delta_2(K) + \ldots + a_{\mu,n}\Delta_n(K) - K_\mu\Delta$$

est, au signe près, le déterminant d'ordre $n+1$

$$\begin{vmatrix} a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \ldots & a_{\mu,n} & K_\mu \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & K_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \ldots & a_{\mu,n} & K_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & K_n \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul, comme ayant deux rangées identiques; l'équation précédente devient donc

$$\Delta X_\mu = 0,$$

et, comme $\Delta \gtrless 0$, on a $X_\mu = 0$ pour toutes les valeurs de μ depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = n$.

On voit donc que, si Δ est différent de zéro, les systèmes (1) et (2) sont équivalents, et le système (2) donne pour les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs uniques et déterminées.

Discussion.

2. Considérons actuellement le cas où le déterminant Δ est égal à zéro, et supposons en outre que tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à p $(p < n)$ soient nuls.

L'un des déterminants mineurs d'ordre p est supposé différent de zéro; supposons que ce soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} \end{vmatrix}.$$

Alors le système des équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots$, $X_p = 0$ sera satisfait pour des valeurs uniques et déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ quand on aura attribué aux inconnues $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ des valeurs arbitraires, mais déterminées.

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & a_{1,p+\beta} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & a_{2,p+\beta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & a_{p,p+\beta} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,p+\beta} \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant d'ordre $p+1$, qui, par hypothèse, est nul.

Ce déterminant est identique au suivant, savoir

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & U_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & U_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & U_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & U_{p+\alpha} \end{vmatrix},$$

où $U_1, U_2, \ldots, U_p$, pour abréger, désignent les quantités

$$\begin{aligned} U_1 = X_1 &- a_{1,p+1}x_{p+1} - a_{1,p+2}x_{p+2} - \ldots \\ &- a_{1,n}x_n - a_{1,p+\beta} - K_1, \\ U_2 = X_2 &- a_{2,p+1}x_{p+1} - a_{2,p+2}x_{p+2} - \ldots \\ &- a_{2,n}x_n - a_{2,p+\beta} - K_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_{p+\alpha} = X_{p+\alpha} &- a_{p+\alpha,p+1}x_{p+1} - a_{p+\alpha,p+2}x_{p+2} - \ldots \\ &- a_{p+\alpha,n}x_n - a_{p+\alpha,p+\beta} - K_{p+\alpha}. \end{aligned}$$

Si l'on décompose le déterminant (α) en une somme de déterminants, les coefficients de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ sont des déterminants mineurs de Δ, qui, par hypothèse, sont

nuls; par suite, (α) prend la forme plus simple

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & X_1 - K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & X_2 - K_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} & X_p - K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \cdots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} - K_{p+\alpha} \end{vmatrix};$$

le déterminant (α) étant nul, on aura

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \cdots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & K_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \cdots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on considère un système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_n$ qui annulent $X_1, X_2, \ldots, X_p$ (ce système, comme nous l'avons vu, est formé par des valeurs arbitraires de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et par des valeurs correspondantes déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_p$), pour ces valeurs, l'équation précédente se réduira à

$$X_{p+\alpha} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & a_{1,p+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & K_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \cdots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

et, comme le multiplicateur de $X_{p+\alpha}$ est, par hypothèse, différent de zéro, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ ne pourra être satisfaite pour les valeurs des inconnues qui annulent X_1, $X_2, \ldots, X_p$, que si le déterminant

$$(\alpha') \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & K_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix}$$

est nul. Si ce déterminant n'est pas nul, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ est incompatible avec les p premières équations; il y aura donc, dans le système proposé, autant d'équations incompatibles avec $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $\ldots$, $X_p = 0$ qu'il y a de déterminants (α') différents de zéro. Si (α') est nul, $X_{p+\alpha}$ est une fonction linéaire et homogène de $X_1, X_2, \ldots, X_p$, définie par l'identité

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Cas où le système proposé est homogène.

3. Ce qui précède montre que, dans le cas où Δ est différent de zéro, un système linéaire et homogène, dans lequel le nombre des équations est égal à celui des inconnues, ne peut être satisfait que pour des valeurs nulles des inconnues.

Si $\Delta = 0$ et si, en outre, tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à p sont nuls sans que tous les déterminants d'ordre p soient nuls, la discussion précédente

montre que, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_p = 0$ sont satisfaites pour des valeurs arbitraires de x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n et des valeurs déterminées correspondantes de x_1, x_2, ..., x_p; les équations $X_{p+1} = 0$, $X_{p+2} = 0$, ..., $X_n = 0$ seront satisfaites pour les mêmes valeurs des inconnues. Ces $n - p$ équations sont des conséquences des p premières; il n'y a jamais incompatibilité, puisque les déterminants tels que (α') sont nuls d'eux-mêmes.

Les quantités $X_{p+\alpha}$ sont des fonctions linéaires de X_1, X_2, ..., X_p définies par la relation

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

II.

LE NOMBRE DES ÉQUATIONS SURPASSE CELUI DES INCONNUES.

4. Supposons d'abord que l'on ait un système de $n+1$ équations à n inconnues, savoir :

$$X_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} = 0,$$
$$X_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$X_{n+1} = a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \dots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1,n+1} = 0.$$

Cherchons la condition pour que ces équations soient compatibles. Désignons par Δ le déterminant d'ordre $n+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix};$$

on aura aussi identiquement

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & X_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Si les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_{n+1} = 0$ admettent une solution commune, l'équation précédente montre qu'on devra avoir $\Delta = 0$; par suite, $\Delta = 0$ est la condition nécessaire pour que les équations proposées soient compatibles.

Inversement, supposons que Δ soit nul et supposons, de plus, que l'un des déterminants mineurs de Δ d'ordre n, formé avec les coefficients des inconnues, soit différent de zéro, par exemple le déterminant

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu-1,1} & a_{\mu-1,2} & \dots & a_{\mu-1,n} \\ a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} & \dots & a_{\mu+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{vmatrix};$$

les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_{\mu-1} = 0$, $X_{\mu+1} = 0$, ..., $X_{n+1} = 0$ admettront une solution unique et déterminée. D'ailleurs, l'équation $\Delta = 0$ peut s'écrire,

d'après (3),

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta = \Delta(n+1)X_{n+1} - \Delta(n)X_n + \ldots \\ \quad \pm \Delta(\mu+1)X_{\mu+1} \mp \Delta(\mu)X_\mu \\ \quad \pm \Delta(\mu-1)X_{\mu-1} \mp \ldots \pm \Delta_1 X_1 = 0. \end{cases}$$

Pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui annulent $X_1, X_2, \ldots, X_{\mu-1}, X_{\mu+1}, \ldots, X_{n+1}$, l'identité (4) se réduit à

$$\Delta(\mu)X_\mu = 0,$$

et, comme $\Delta(\mu)$ est supposé différent de zéro, pour ces valeurs on aura aussi

$$X_\mu = 0,$$

c'est-à-dire que les $n+1$ équations proposées sont compatibles.

On voit donc que si les déterminants mineurs de Δ, coefficients de $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n+1,n+1}$, ne sont pas tous nuls, la condition $\Delta = 0$ indique que les équations proposées ont une solution commune. Si tous les déterminants mineurs de Δ d'ordre supérieur à p et ne renfermant pas les éléments $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n+1,n+1}$ sont nuls, et si un déterminant d'ordre p, par exemple

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} \end{vmatrix},$$

est différent de zéro, les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$ admettent pour $x_1, x_2, \ldots, x_p$ une solution déterminée quand on donne à $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ des valeurs arbitraires, mais déterminées.

En opérant comme pour la discussion d'un système de

n équations à n inconnues (n° 2), on arrive à l'identité

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour un système de valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui annulent $X_1, X_2, \dots, X_p$, cette identité se réduit à la suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix} X_{p+\alpha} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc le déterminant

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ ne peut être satisfaite par les valeurs des inconnues qui annulent $X_1, X_2, \ldots, X_p$; l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ est donc incompatible avec les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$, quoique Δ soit nul.

Le nombre d'équations incompatibles avec $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$ est égal au nombre de déterminants de la forme (6) qui ne sont pas nuls.

5. D'une manière générale, considérons un système de $n + p$ équations à n inconnues, et proposons-nous de chercher les conditions de compatibilité des équations de ce système.

Soit le système

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} = 0,\\
X_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + a_{n,n+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n+p} &= a_{n+p,1}x_1 + a_{n+p,2}x_2 + \ldots + a_{n+p,n}x_n + a_{n+p,n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Supposons d'abord que l'un des déterminants d'ordre n, formé avec les coefficients des inconnues de n des équations précédentes, soit différent de zéro; supposons que ce soit le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Considérons le déterminant d'ordre $n + 1$

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ a_{n+\nu,1} & a_{n+\nu,2} & \ldots & a_{n+\nu,n} & a_{n+\nu,n+1} \end{vmatrix}.$$

On aura identiquement

$$(5)\quad \Delta(\nu) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & X_n \\ a_{n+\nu,1} & a_{n+\nu,2} & \ldots & a_{n+\nu,n} & X_{n+\nu} \end{vmatrix}.$$

Comme $\Delta \gtrless 0$, les équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots, \quad X_n = 0$$

admettent une solution unique et déterminée; si l'équation $X_{n+\nu} = 0$ doit être compatible avec les précédentes, il faudra que l'on ait $\Delta(\nu) = 0$. Les équations $\Delta(1) = 0$, $\Delta(2) = 0, \ldots, \Delta(p) = 0$ seront donc (dans le cas de $\Delta \gtrless 0$) les conditions nécessaires pour que les $n + p$ équations proposées soient compatibles.

Ces conditions sont aussi suffisantes, car l'identité (5) devient

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & X_n \\ a_{n+\nu,1} & a_{n+\nu,2} & \ldots & a_{n+\nu,n} & X_{n+\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

et, par suite, le système de valeurs des inconnues qui annule $X_1, X_2, \ldots, X_n$ annule aussi $X_{n+\nu}$, puisque Δ est toujours supposé différent de zéro. Par suite enfin, $\Delta(1) = 0$, $\Delta(2) = 0, \ldots, \Delta(p) = 0$ sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les $n + p$ équations proposées soient compatibles, sous la condition $\Delta \gtrless 0$.

Dans le cas où les $n + p$ équations proposées sont compatibles, tous les déterminants d'ordre $n + 1$ formés avec les coefficients de $n + 1$ des équations proposées sont nuls.

Cela résulte de la proposition établie au n° 4.

Supposons maintenant que tous les détermin d'ordre supérieur à q que l'on peut former avec les c ficients des inconnues, en prenant pour éléments d' rangée les coefficients d'une même équation et p éléments d'une colonne les coefficients d'une même connue dans les mêmes équations, soient nuls, et qu déterminant d'ordre q

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. On établira, comme on l'a fai n° 2, l'identité

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} & X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \cdots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q} & a_{q,n+1} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \cdots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cela posé, si le déterminant

$$(6') \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q} & a_{q,n+1} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \cdots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,n+1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, l'équation $X_{q+\alpha} = 0$ sera incompatible avec le système $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_q = 0$; si le déterminant (6') est nul, $X_{q+\alpha} = 0$ est au contraire compatible avec $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_q = 0$.

Par suite, les équations $\Delta(1) = 0$, $\Delta(2) = 0$, ..., $\Delta(p) = 0$ n'entraînent plus la compatibilité des $n + p$ équations proposées.

III.

LE NOMBRE DES INCONNUES SURPASSE CELUI DES ÉQUATIONS.

6. Considérons le système de n équations à $n + p$ inconnues

$$\begin{aligned}
X_1 = {} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots \\
& + a_{1,n}x_n + \ldots + a_{1,n+p}x_{n+p} + K_1 = 0, \\
X_2 = {} & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots \\
& + a_{2,n}x_n + \ldots + a_{2,n+p}x_{n+p} + K_2 = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_n = {} & a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots \\
& + a_{n,n}x_n + \ldots + a_{n,n+p}x_{n+p} + K_n = 0.
\end{aligned}$$

Si un seul des déterminants d'ordre n formés avec les coefficients de n des inconnues dans les n équations est différent de zéro, le système proposé admet une infinité de solutions.

Si tous les déterminants d'ordre supérieur à q ($q < n$) formés avec les coefficients des inconnues sont nuls, et que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,q} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,q} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{q,1} & a_{q,2} & \ldots & a_{q,q}
\end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, nous pourrons, comme au n° 2,

établir l'identité

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & K_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & K_{q+\alpha} \end{vmatrix} = 0. \end{array}\right.$$

Si donc le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & K_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & K_{q+\alpha} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, l'équation $X_{q+\alpha} = 0$ est incompatible avec $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_q = 0$.

7. Si les équations proposées sont homogènes, c'est-à-dire si $K_1 = 0, K_2 = 0, \dots, K_n = 0$, l'identité (6) et toutes celles qu'on obtient en faisant varier α de 1 à $n - q$, prennent la forme

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

et l'équation $X_{q+\alpha} = 0$ est compatible avec les q premières.

La quantité $X_{q+\alpha}$ est une fonction linéaire et homogène de $X_1, X_2, \ldots, X_q$, et par suite les n équations du système proposé se réduisent à q d'entre elles. Ces q équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_q = 0$ sont indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre leurs premiers membres. Si l'on avait, en effet, entre $X_1, X_2, \ldots, X_q$ une relation de la forme

$$(8) \qquad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_q X_q = 0,$$

on en déduirait

$$\begin{aligned} a_{1,1}\lambda_1 + a_{2,1}\lambda_2 + \ldots + a_{q,1}\lambda_q &= 0, \\ a_{1,2}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + \ldots + a_{q,2}\lambda_q &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{1,q}\lambda_1 + a_{2,q}\lambda_2 + \ldots + a_{q,q}\lambda_q &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{q,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{q,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,q} & a_{2,q} & \ldots & a_{q,q} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre étant un déterminant que nous avons supposé différent de zéro, l'équation (8) ne peut pas avoir lieu.

8. Nous allons, en terminant cette question, donner la démonstration d'une proposition générale qui renferme comme cas particuliers les théorèmes suivants de M. Ventéjol (*Théorie de l'élimination*, février 1877):

1° *Si, dans un système de n équations linéaires et homogènes à $n+p$ inconnues, un déterminant d'ordre $(n-1)$ est différent de zéro, pour que ces équations se réduisent à $(n-1)$ distinctes, il est nécessaire et suffisant que les $p+1$ déterminants d'ordre n formés par les $n-1$ colonnes qui donnent le déterminant différent*

de zéro et chacune des $p+1$ autres soient nuls à la fois.

2° *Si, dans un système de n équations linéaires et homogènes à $n+p$ inconnues, un déterminant d'ordre $n-1$ est différent de zéro, et que les $p+1$ déterminants d'ordre n formés par les $n-1$ colonnes qui donnent le déterminant différent de zéro et chacune des $p+1$ restantes soient nuls à la fois, tous les autres déterminants d'ordre n tirés du système proposé seront aussi nuls.*

3° *Si, dans un système de n équations linéaires et homogènes à $n+p$ inconnues, tous les déterminants d'ordre $n-1$ sont nuls, et qu'un déterminant d'ordre $n-2$ soit différent de zéro, le système se réduit à $n-2$ équations distinctes.*

4° *Si tous les déterminants d'ordre $n-2$ sont nuls et qu'un déterminant d'ordre $n-3$ soit différent de zéro, le système proposé se réduit à $n-3$ équations distinctes.*

Supposons à cet effet qu'un déterminant d'ordre q $(q<n)$ soit différent de zéro ; soit, pour fixer les idées,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} \end{vmatrix}$$

ce déterminant, et considérons le déterminant d'ordre $q+1$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & a_{1,q+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & a_{2,q+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & a_{q,q+1} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,q+1} \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons ce déterminant par $\Delta(\alpha, 1)$, en posant, d'une manière générale,

$$\Delta(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} & a_{1,q+\beta} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} & a_{2,q+\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q} & a_{q,q+\beta} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \cdots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,q+\beta} \end{vmatrix}.$$

En opérant sur le déterminant $\Delta(\alpha, 1)$ comme nous l'avons fait dans les nos 1 et 2, on obtiendra l'identité

$$(9)\quad \Delta(\alpha, 1)\, x_{q+1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} & U_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} & U_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q} & U_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \cdots & a_{q+\alpha,q} & U_{q+\alpha} \end{vmatrix},$$

en faisant

$$\begin{aligned} U_1 &= X_1 - a_{1,q+2}\, x_{q+2} \\ &\quad - a_{1,q+3}\, x_{q+3} - \ldots - a_{1,n+p}\, x_{n+p}, \\ U_2 &= X_2 - a_{2,q+2}\, x_{q+2} \\ &\quad - a_{2,q+3}\, x_{q+3} - \ldots - a_{2,n+p}\, x_{n+p}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ U_{q+\alpha} &= X_{q+\alpha} - a_{q+\alpha,q+2}\, x_{q+2} \\ &\quad - a_{q+\alpha,q+3}\, x_{q+3} - \ldots - a_{q+\alpha,n+p}\, x_{n+p}, \end{aligned}$$

et, par suite, en développant et faisant usage de la notation adoptée, il viendra

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta(\alpha, 1)\, x_{q+1} + \Delta(\alpha, 2)\, x_{q+2} + \ldots + \Delta(\alpha, n+p-q)\, x_{n+p} \\ &\quad = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} & X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \cdots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Pour que les équations données se réduisent aux q premières, savoir

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots, \quad X_q = 0,$$

il faut que toute solution de ces équations satisfasse à l'équation

$$X_{q+\alpha} = 0,$$

pour toutes les valeurs de α depuis $\alpha = 1$ jusqu'à $\alpha = n - q$.

Or, si l'on donne à $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{n+p}$ des valeurs tout à fait arbitraires, les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_q = 0$ fournissent pour $x_1, x_2, \ldots, x_q$ des valeurs fonctions déterminées de $x_{q+1}, \ldots, x_{n+p}$. Pour ces valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_q, X_{q+\alpha}$ devront s'annuler; par suite, on doit avoir, quelles que soient les valeurs de $x_{q+1}, \ldots, x_{n+p}$,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\alpha, 1) x_{q+1} + \Delta(\alpha, 2) x_{q+2} + \ldots \\ \qquad + \Delta(\alpha, n+p-q) x_{n+p} = 0. \end{array} \right.$$

L'équation (11) devant subsister quelles que soient les valeurs de $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{n+p}$, on devra avoir

$$\Delta(\alpha, 1) = 0, \quad \Delta(\alpha, 2) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta(\alpha, n+p-q) = 0,$$

et cela pour toutes les valeurs de α depuis $\alpha = 1$ jusqu'à $\alpha = n - q$.

On a donc ce théorème :

THÉORÈME. — *Si le déterminant d'ordre q désigné plus haut est différent de zéro, pour que les équations proposées se réduisent aux q premières, il faut que tous les déterminants $\Delta(\alpha, \beta)$ obtenus en faisant varier α de 1 à $n - q$ et β de 1 à $n + p - q$ soient nuls.*

L'identité (10) *montre d'ailleurs que, si les déterminants $\Delta(\alpha, \beta)$ obtenus en faisant varier α depuis 1 jusqu'à $n - q$ et β depuis 1 jusqu'à $n + p - q$ sont nuls, les quantités $X_{q+\alpha}$ sont des fonctions linéaires et homo-*

gènes de $X_1, X_2, \ldots, X_q$ *et, par suite, toutes les équations se réduisent aux q premières.*

En suivant la même méthode, on démontrerait aisément que *tous les déterminants d'ordre* $q+1$ *sont nuls, si les équations proposées se réduisent à q d'entre elles.*

(*A suivre.*)

REMARQUE SUR LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉE EN 1879 POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR UN ABONNÉ.

1. Étant donnés une conique K et un point O situé sur cette conique, on sait que, si l'on fait tourner les côtés d'un angle droit ayant pour sommet le point O et si, aux points où ils rencontrent la courbe, on lui mène des tangentes, le point de rencontre de ces tangentes décrit une droite Δ.

Cette droite Δ (que l'on peut appeler l'adjointe du point O relativement à la conique) peut se déterminer de la façon suivante :

Par le point O, menons deux droites isotropes coupant la courbe aux points i et j : la droite ij est l'adjointe du point O.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer qu'une droite isotrope est perpendiculaire à elle-même.

2. Soient une conique donnée C, ayant pour centre le point O, et un point fixe M; on considère un diamètre quelconque de la conique; par ses extrémités et le point M on mène un cercle dont le centre décrit, quand le diamètre tourne autour du point O, une conique K passant par le point O.

Il s'agit de trouver l'adjointe du point O relativement à K.

Soit OI une droite isotrope passant par le point O; le cercle passant par les extrémités de ce diamètre et par le point M se compose d'abord de OI et de la droite isotrope de système opposé MI que l'on peut mener par le point M. Le point de rencontre p de ces deux droites, étant le centre du cercle, est sur la courbe K.

Semblablement, si l'on considère les deux autres droites isotropes OJ et MI qui passent respectivement par les points O et M et qui se coupent au point q, on voit que q est sur la conique K.

Les points p et q sont donc les intersections de K avec les droites isotropes qui se croisent au point O; pq est donc l'adjointe du point O.

Il est visible d'ailleurs que la droite pq passe par le milieu du segment OM et est perpendiculaire à ce segment; la proposition énoncée dans le sujet de la composition est donc démontrée.

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

J'ai publié dans le numéro de mai des *Nouvelles Annales* un article intitulé *Sur un procédé d'élimination*, et j'ai donné comme application une manière de former l'équation aux puissances n des racines d'une équation algébrique donnée de degré m (m étant plus petit que n ou égal à n). J'aurais pu ajouter que la démonstration que j'ai faite justifie également la méthode très élégante au moyen de laquelle on forme l'équation

en y résultant de l'élimination de x entre les deux équations

$$(1) \qquad f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

$$(2) \qquad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}.$$

On sait que la fonction rationnelle la plus générale d'une racine de l'équation (1) peut être exprimée par une fonction entière de degré $m - 1$ de cette racine, par conséquent par une fonction de la forme (2); ce problème est donc le plus général de son espèce.

Voici la méthode que l'on emploie pour obtenir l'équation transformée.

De l'équation

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$$

on déduit, en multipliant les deux membres par x et en remplaçant x^m par sa valeur tirée de l'équation $f(x) = 0$,

$$(3) \qquad xy = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1},$$

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ étant des fonctions de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ et des coefficients de $f(x) = 0$ aisés à déterminer.

En multipliant ensuite les deux membres de l'équation (3) par x et remplaçant encore x^m par sa valeur tirée de $f(x) = 0$, on aura

$$(4) \qquad x^2 y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_{m-1} x^{m-1},$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$x^{m-1} y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{m-1} x^{m-1}.$$

Les équations

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{m-1} x^{m-1} + \alpha_{m-2} x^{m-2} + \ldots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 - y = 0, \\ \beta_{m-1} x^{m-1} + \beta_{m-2} x^{m-2} + \ldots + \beta_2 x^2 + (\beta_1 - y) x + \beta_0 = 0, \\ \gamma_{m-1} x^{m-1} + \gamma_{m-2} x^{m-2} + \ldots + (\gamma_2 - y) x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ (\lambda_{m-1} - y) x^{m-1} + \lambda_{m-2} x^{m-2} + \ldots + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0 = \end{array} \right.$$

considérées comme linéaires en $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x, x^0$, admettant une solution différente de zéro, le déterminant

$$\Phi(y) = \begin{vmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_{m-2} & \ldots & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 - y \\ \beta_{m-1} & \beta_{m-2} & \ldots & \beta_2 & \beta_1 - y & \beta_0 \\ \gamma_{m-1} & \gamma_{m-2} & \ldots & \gamma_2 - y & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{m-1} - y & \lambda_{m-2} & \ldots & \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{vmatrix}$$

est nul; les équations (a) ne sont autre chose que les équations

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad F_{m-1}(x) = 0$$

de la théorie générale, comme il est aisé de le voir; par suite, l'équation $\Phi(y) = 0$, de degré m, donne la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (1) et (2) aient une racine commune en x.

Veuillez agréer, etc.

BIEHLER.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1880;

Composition en Mathématiques.

Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A de cette surface et la génératrice B du même système qui est perpendiculaire à la première; par les points a et b où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes A′ et B′ de l'autre système; soient a' et b' les points où les deux droites A′ et B′ sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.

1° Trouver le lieu des points a et b, et celui des points a' et b', quand la droite A décrit le paraboloïde.

2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites A et B' ou A' et B.

3° Calculer le rapport des longueurs $a'b'$ et ab des perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.

Composition en Physique.

I. Un manomètre à air comprimé a ses deux branches d'inégale section; la branche fermée a une section S, et la branche ouverte une section n fois plus grande. La différence de niveau dans les deux branches est y. La pression extérieure ne changeant pas, on demande ce qui se passera si l'on ajoute un poids P de mercure dans la branche ouverte.

On calculera numériquement l'exemple suivant : $S = 1$ centimètre carré, $n = 2$, $y = 4$ centimètres, $V = 1$ centimètre cube et demi ($1^{cc},5$), $P = 20^{gr},4$, $D = 13,6$, densité du mercure.

II. Trouver le foyer principal d'une sphère en verre de rayon R et d'indice n. (On comptera la distance focale à partir de la face de sortie des rayons.)

L'expérience étant supposée faite à 0°, on demande de combien se déplacera le foyer si la température est portée à t degrés, en supposant que l'indice -1 soit proportionnel à la densité $\left(\frac{n-1}{D} = \text{const.}\right)$. On désignera par K le coefficient de dilatation cubique du verre.

On calculera ensuite ce déplacement pour $n_0 = \frac{3}{2}$.

QUESTIONS RETIRÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879 ET DE 1880 EN MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

1879. Étant donnée une équation du troisième degré

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

calculer les coefficients m, n, p d'un polynôme du second degré $mx^2 + nx + p$ tel que les valeurs que prend ce polynôme quand on y remplace x successivement par les trois racines de l'équation proposée soient égales à ces trois racines.

Réciproquement, étant donné un polynôme du second degré $mx^2 + nx + p$, calculer les coefficients a, b, c d'une équation du troisième degré

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

telle que la propriété énoncée précédemment ait lieu.

1880. Le produit

$$(1 + qz)(1 + q^3 z)\ldots(1 + q^{2n-1} z)\left(1 + \frac{q}{z}\right)\ldots\left(1 + \frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$

est représenté par

$$\frac{A_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n.$$

1° On demande d'exprimer en fonction du paramètre q les coefficients des différentes puissances de la variable z.

2° Le paramètre q étant un nombre réel dont la valeur absolue est inférieure à l'unité, ou une quantité imaginaire dont le module est inférieur à l'unité, démontrer que le coefficient d'une puissance quelconque de z tend vers une limite quand n augmente indéfiniment, et déterminer cette limite.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880. EXPOSITION SOMMAIRE D'UNE SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Soient M *et* N *les points où l'axe des* x *rencontre le cercle* $x^2+y^2=R^2$; *considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points* M *et* N; *menons, par un point* Q *pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole.*

Soient A *et* B *les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites* QA *et* QB, *l'une est parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe* P.

Le point P *étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante qui passe par les points* M *et* N *est déterminée; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point* P *décrit la droite* $y=x$, *quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.*

Commençons par quelques remarques. Appelons R et S les points d'intersection, autres que M et N, de l'hyperbole équilatère et de la circonférence. Il résulte du théorème de Frégier que *les tangentes en* R *et* S *à l'hyperbole sont perpendiculaires à* MN; par suite, *le point* C, *milieu de* RS, *est le centre de l'hyperbole.*

D'après un théorème connu, *les axes de cette courbe sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites* RS, MN. Connaissant le centre C et les axes, on a tout de suite les asymptotes.

Arrivons à la question proposée. Lorsque le point Q décrit la circonférence donnée, les droites QA, QB enveloppent une courbe. Du point arbitraire Q partent seulement deux droites QA, QB, et il n'y a pas d'autres droites telles que celles-ci qui contiennent Q ; on ne peut alors mener de ce point que deux tangentes à cette courbe : donc c'est une conique.

Cette conique a pour tangentes les tangentes à l'hyperbole et au cercle menées aux points M, N, R, S : cela se voit tout de suite en faisant arriver le point Q en chacun de ces points ([1]). Mais, parmi ces tangentes, il y en a quatre qui sont parallèles entre elles ; cette conique ne peut être alors qu'une conique aplatie, et les quatre autres tangentes doivent passer par un même point P.

Toutes les tangentes à cette conique aplatie sont les unes perpendiculaires à MN et les autres passent par le point fixe P. Cela démontre la première partie de la question posée, et l'on voit en outre que *le point* P *est le pôle de* MN *par rapport à l'hyperbole équilatère.*

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante est déterminée, puisque l'on connaît les points M, N de cette courbe et les tangentes PM, PN en ces points. On peut ajouter, d'après ce qui précède : *Le pied de la perpendiculaire abaissée du point* O, *milieu de* MN, *sur la polaire de* P *par rapport au cercle, est le centre de cette hyperbole, et les bissectrices des angles*

([1]) Ce que nous venons de dire pour cette conique est applicable lorsqu'au lieu d'une hyperbole et d'une circonférence on donne deux coniques quelconques. Il en résulte que la conique enveloppe des droites telles que QA, QB est la même, que le point Q décrive l'une ou l'autre des coniques données. Du reste, on peut dire que cette conique est *l'enveloppe des droites qui sont partagées harmoniquement par les deux coniques données,* et dans cette génération rien ne distingue ces deux dernières courbes.

compris entre cette polaire et MN *donnent les directions de ses axes.*

Il est très simple alors d'avoir les asymptotes et les sommets de cette hyperbole.

D'après ce que nous venons de trouver, on voit que *les hyperboles équilatères qui correspondent aux différents points d'un diamètre de la circonférence donnée ont leurs centres sur ce diamètre et ont leurs axes parallèles entre eux.*

Appelons F, F′ les foyers de l'hyperbole dont le centre est C, et prenons le rapport $\frac{CR}{CF}$. Lorsque P se déplace sur le diamètre OP, en restant au dehors de la circonférence, pour chacune de ses positions, on a une hyperbole qui donne un rapport analogue à $\frac{CR}{CF}$. Les droites telles que CR sont parallèles entre elles, ainsi que les droites telles que CF, et, comme les hyperboles équilatères sont des courbes semblables, nous concluons que les rapports tels que $\frac{CR}{CF}$ sont égaux entre eux. Par suite, *lorsque* P *est extérieur à la circonférence donnée, le lieu des foyers* F *est l'ellipse qu'on obtient en faisant tourner d'un même angle les ordonnées telles que* CR *de cette circonférence et en portant sur ces droites des longueurs proportionnelles à ces ordonnées.*

Cette ellipse a pour centre le point O et rencontre la circonférence donnée aux points I et L, où cette courbe est coupée par le diamètre que parcourt le point P. En ces points les tangentes à cette ellipse sont parallèles à CF. Une construction bien connue donne la direction de ses axes : il suffit de prendre les bissectrices des angles formés par les droites RF, RF′. Mais ces bissectrices sont la tangente et la normale à l'hyperbole équilatère en R :

donc cette ellipse, lieu des foyers F, a un axe dirigé suivant MN.

Enfin, si le point P, se déplaçant toujours sur le même diamètre OP, vient à l'intérieur de la circonférence donnée, il lui correspond des hyperboles équilatères dont les axes transverses sont perpendiculaires à CF. *Les foyers de ces courbes sont sur une hyperbole* dont le centre est O, qui a un axe dirigé suivant MN, qui passe par les points I et L, et qui, en ces points, rencontre à angle droit l'ellipse précédente.

D'après cela, *l'ellipse et l'hyperbole, lieux des foyers des hyperboles équilatères qui correspondent aux différents points d'un même diamètre* OP, *sont des courbes homofocales.*

Les foyers communs sont M *et* N. En effet, menons au point I la tangente à la circonférence donnée; appelons E le point où elle rencontre MN. Les tangentes en I à l'ellipse et à l'hyperbole lieux des foyers rencontrent cette même droite en T et U. Le point E est le milieu de TU. La circonférence décrite sur TU comme diamètre a pour centre E et pour tangente en I le rayon OI. On a alors $OT \times OU = \overline{OI}^2 = \overline{ON}^2$; donc, etc.

SUR LES TRAJECTOIRES D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A L'ACTION D'UNE FORCE CENTRALE;

PAR M. A. LEGOUX,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Nous ne nous occuperons, dans ce qui va suivre, que du cas de l'attraction. La méthode s'applique sans peine au cas de la répulsion.

Si l'on représente par $m\mu r^n$ la valeur de l'attraction et par K le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps, l'équation différentielle de la trajectoire est, comme on sait,

$$\mu r^n = \frac{K^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)$$

ou, en posant $z = \frac{1}{r}$,

$$(1) \qquad \frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{\mu}{K^2} z^{-(n+2)} = 0;$$

en intégrant une première fois, on a, si $n + 1 \gtrless 0$,

$$(2) \qquad \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = B - z^2 - A z^{-(n+1)},$$

B et A étant des constantes définies par les égalités

$$A = \frac{2\mu}{(n+1)K^2}, \quad B = z_0^2 + p_0^2 + \frac{2\mu}{(n+1)K^2} z_0^{-(n+1)},$$

où z_0 et p_0 sont les valeurs initiales de z et $\frac{dz}{d\theta}$.

En général, on ne peut pas intégrer complètement l'équation (2). Nous montrerons plus loin qu'on peut l'intégrer dans le cas où $B = 0$. Mais on peut, au moyen de cette équation, indiquer la forme générale de la courbe, trouver ses sommets, le sens de sa concavité, ses asymptotes et son rayon de courbure.

D'abord on reconnaît sans peine que l'équation

$$B - z^2 - A z^{-(n+1)} = 0$$

a au plus deux racines réelles positives ; elle peut avoir une racine double, une racine simple ou pas de racine [1].

---

(1) Dans cet article nous supposerons toujours qu'il s'agit des racines positives.

1° $n+1>0$. — A et B sont positifs, et, suivant que

$$B \gtreqless \frac{n+3}{n+1}\left(\frac{\mu}{K^2}\right)^{\frac{2}{n+3}},$$

on a deux racines, une racine double ou aucune racine positive. On peut mettre l'équation (2) sous la forme

$$d\theta = \frac{z^{\frac{n+1}{2}}dz}{\sqrt{-z^{n+3}+Bz^{n+1}-A}}.$$

Si l'on désigne par z' et z'' les deux racines positives, on reconnaît que z ne peut varier qu'entre les limites z' et z'', que par conséquent la trajectoire sera comprise entre deux cercles ayant l'origine pour centre et pour rayons $\frac{1}{z'}$, $\frac{1}{z''}$; de plus, si l'on désigne par V l'angle de la tangente en un point avec le rayon vecteur,

$$\text{tang}\,V = \frac{r\,d\theta}{dr} = -\frac{z\,d\theta}{dz}.$$

Or, pour $z=z'$ et $z=z''$, $\text{tang}\,V=\infty$; donc la courbe sera tangente aux cercles limites.

Si $z=z'$, les deux cercles précédents coïncident et la trajectoire est une circonférence.

2° $n+1<0$. — A est négatif et B peut être positif ou négatif.

Soient

$$n+1=-n', \quad A=-A';$$

l'équation (2) peut s'écrire

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{A'z^{n'}-z^2+B}}.$$

Ce cas en comprend plusieurs autres suivant que

$$n'>2, \quad n'<2, \quad n'=2.$$

$n' > 2$. — Si $B > 0$, le polynôme sous le radical a deux, une ou zéro racines positives. Soient z' et z'' ces racines, et supposons $z' < z''$; il faut, pour que $d\theta$ soit réel, que $z < z'$ ou $z > z''$, ce qui montre que la courbe se composera de deux parties, l'une située à l'intérieur du cercle ayant l'origine pour centre et $\frac{1}{z''}$ pour rayon, l'autre extérieure au cercle concentrique au premier et de rayon $\frac{1}{z'}$. D'ailleurs, la courbe sera tangente à ces deux cercles. Si $z' = z''$, ces deux cercles coïncident, et, s'il n'y a pas de racines réelles positives, z pourra prendre toutes les valeurs possibles de 0 à $+\infty$.

Soit maintenant $B < 0$; le polynôme sous le radical n'aura qu'une seule racine réelle z', et z pourra varier depuis z' jusqu'à $+\infty$. La courbe sera située à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{1}{z'}$.

$n' < 2$. — Si $B > 0$, on a toujours une racine réelle positive. Soit z' cette racine. Il faut que z reste toujours inférieur à z', c'est-à-dire que la courbe doit être située à l'extérieur du cercle de rayon $\frac{1}{z'}$.

Si $B < 0$, on a deux, une ou zéro racines réelles positives. Soient z' et z'', $z' < z''$. Il faut que z reste toujours compris entre z' et z''. La courbe sera comprise entre deux cercles de rayons $\frac{1}{z'}$ et $\frac{1}{z''}$.

Si $z' = z''$, les deux cercles précédents coïncident et la trajectoire est un cercle.

$n' = 2$:

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{z^2(A'-1)+B}} = \frac{dz}{\sqrt{z^2\left(\frac{\mu}{K^2}-1\right)+B}}.$$

Dans ce cas, l'intégration s'effectue facilement, et l'on trouve pour l'équation de la trajectoire :

$$1-\frac{\mu}{K^2}>0,\quad z=C\cos(k\theta-\alpha),$$

$$1-\frac{\mu}{K^2}<0,\quad z=Ce^{k\theta}+C'e^{-k\theta},$$

$$1-\frac{\mu}{K^2}=0,\quad z=C\theta+C'.$$

Sommets. — Nous appellerons *sommets* les points où le rayon vecteur est maximum ou minimum ; ces points sont déterminés par l'équation

$$\frac{dz}{d\theta}=\sqrt{B-z^2-Az^{-(n+1)}}=0.$$

D'après ce qui précède, on voit que la trajectoire a deux sommets au plus. Si l'on désigne par z' et z'' les deux racines de l'équation précédente, l'angle compris entre un rayon vecteur maximum et un rayon vecteur minimum consécutifs sera donné par l'intégrale définie

$$\Theta=\int_{z'}^{z''}\frac{dz}{\sqrt{B-z^2-Az^{-(n+1)}}};$$

si cet angle Θ est commensurable avec π, la courbe est fermée, sinon elle se compose d'une infinité d'arcs égaux.

Concavité. — Comme, d'après l'équation (1),

$$\frac{1}{r}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}$$

est constamment positif, la trajectoire tournera toujours sa concavité vers le centre d'attraction.

Asymptotes. — Il n'y a pas d'asymptotes si $n+1>0$.

puisque la courbe est comprise tout entière entre deux cercles concentriques.

Supposons donc $n+1<0$. Pour qu'il y ait des asymptotes rectilignes, il faut que, z tendant vers zéro, θ tende vers une valeur finie ainsi que la sous-tangente en coordonnées polaires.

Or, si l'on fait décroître z jusqu'à zéro, la sous-tangente, qui est représentée par $-\frac{d\theta}{dz}$, a pour limite $\frac{1}{\sqrt{B}}$. Donc il faut d'abord que B soit positif. Dans le second membre de l'équation

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{A' z^{n'} - z^2 + B}},$$

si z décroît depuis une quantité très petite z_1 jusqu'à zéro, la différentielle conserve une valeur finie; donc θ tendra vers une limite finie et déterminée lorsque z tendra vers zéro. Comme d'ailleurs on peut prendre devant le radical le signe + ou le signe —, on aura généralement deux directions asymptotiques.

Rayon de courbure. — Rappelons la formule qui donne l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{z^3\left(z + \frac{d^2 z}{d\theta^2}\right)}.$$

De l'équation (1) on tire

$$z + \frac{d^2 z}{d\theta^2} = \frac{\mu}{K^2} z^{-(n+2)},$$

de l'équation (2) on tire

$$z^2 + \frac{dz^2}{d\theta^2} = B - A z^{-(n+1)}.$$

Substituons; il vient

$$\rho = \frac{\left(B - A z^{-(n+1)}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mu}{K^2} z^{-n+1}}.$$

Cette valeur de ρ paraît assez compliquée dans le cas général; mais, si l'on choisit les données initiales de façon que B soit nul, ce qui ne peut arriver que si $n+1<0$, on a

$$\rho = (-A)^{\frac{3}{2}} \frac{K^2}{\mu} z^{-\frac{(n+5)}{2}}.$$

Cas particuliers :

$n = -\ \ 5,$	$\rho = \text{const.},$	la trajectoire est un cercle.
$n = -\ \ 7,$	$\rho = Cz = \frac{C}{r},$	»
$n = -11,$	$\rho = Cz^3 = \frac{C}{r^3},$	»
........,	..........,	»

Cas particuliers où l'intégration peut s'effectuer. — Supposons $n+1<0$ et $B=0$; l'équation (2) devient

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{-z^2 - Az^{-n-1}}} = \frac{dz}{z\sqrt{-1 - Az^{-n-3}}}.$$

On sait que dans ce cas A est négatif. Posons

$$-Az^{-n-3} = u^2;$$

on trouve sans difficulté, en intégrant,

$$u^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{n+3}{2}(\theta - \alpha)},$$

α étant la constante d'intégration, ou, en remplaçant u^2

et A par leurs valeurs,

$$r^{-n-1} = -\frac{2\mu}{(n+1)K^2}\cos^2\frac{n+3}{2}(\theta-\alpha).$$

La méthode d'intégration précédente n'est pas applicable lorsque $n=-1$ et $n=-3$. Le cas de $n=-1$ se traite sans difficulté. Le cas de $n=-3$ a été étudié plus haut.

SUR LES CONIQUES QUI PASSENT PAR TROIS POINTS ET ONT UN DOUBLE CONTACT AVEC UN CERCLE DONNÉ;

PAR M. LAGUERRE.

1. Étant donnés trois points a, b, c et un cercle K, on peut construire quatre coniques passant par ces points et ayant un double contact avec le cercle. Les longueurs des axes de ces coniques qui sont parallèles à la corde de contact peuvent se déterminer facilement de la façon suivante.

Des points a, b et c comme centres, décrivons trois cercles A, B et C qui coupent orthogonalement le cercle K et enroulons un fil autour de ces trois cercles; cet enroulement peut se faire de quatre façons différentes, qui correspondent aux quatre solutions du problème. Considérons l'un d'eux en particulier; soient respectivement α, α', β, β' et γ, γ' les points de contact du fil avec les cercles A, B et C.

Cela posé, *si l'on construit un triangle ayant pour côtés les longueurs $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$ et $\gamma'\alpha$, le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle est la longueur de l'axe de la conique cherchée qui est parallèle à la corde des contacts.*

La proposition précédente résulte immédiatement de ce que, quand on effectue une transformation par directions réciproques, aux divers points d'un cercle correspondent des cycles dont les centres décrivent une conique, tandis qu'ils coupent orthogonalement un cercle doublement tangent à cette conique ([1]).

Il est très facile, du reste, de la vérifier analytiquement.

2. Considérons, pour fixer les idées, une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

et un cercle K, doublement tangent à cette ellipse, dont le centre soit sur l'axe des x.

L'équation de ce cercle sera

$$(x-\alpha)^2+y^2=R^2,$$

avec la condition

$$R^2=b^2-\frac{b^2\alpha^2}{c^2}.$$

Soient M′, M″ et M‴ trois points de l'ellipse dont les coordonnées soient respectivement x', y', x'', y'' et x''', y'''.

Le carré du rayon du cercle ayant pour centre M′ et coupant orthogonalement le cercle K est égal à

$$(x'-\alpha)^2+y'^2-R^2$$

ou, en remplaçant y'^2 et R^2 par leurs valeurs, à

$$\left(\frac{cx'}{a}-\frac{\alpha a}{c}\right)^2;$$

semblablement, le carré du rayon du cercle ayant pour

([1]) *Voir* ma Note *Sur la Géométrie de direction*, communiquée à la Société mathématique dans la séance du 4 juin 1880.

centre M″ et coupant orthogonalement K a pour valeur

$$\left(\frac{cx''}{a} - \frac{\alpha a}{c}\right)^2.$$

Menons une tangente commune à ces deux cercles (en la choisissant de telle façon que, quand M″ vient à se confondre avec M′, les deux points de contact se confondent également), et désignons par T‴ la distance comprise sur cette tangente entre les deux points de contact.

On trouvera aisément

$$T'''^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 - \frac{c^2}{a^2}(x' - x'')^2,$$

ou encore

$$T'''^2 = 2b^2\left(1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2}\right).$$

Soient φ, θ, ψ les anomalies excentriques des points M′, M″, M‴, en sorte que l'on ait



$x' = a\cos\varphi,\quad y' = b\sin\varphi,$

... $= a\cos\theta,\quad y'' = b\sin\theta,$

... $a\cos\psi,\quad y''' = b\sin\psi;$

... $- \sin\varphi\sin\theta.$

... $= 4b^2\sin^2\frac{\varphi - \theta}{2},$

... solue T‴ est égale à

... alogue par T′ la dis-

... ayant M″ et M‴ pour

... par T″ la distance com-

... M‴ pour centres et or-

thogonaux à K, on démontrerait de même que T' et T'' sont, en valeur absolue, respectivement égales à $2b\sin\frac{\theta-\psi}{2}$ et à $2b\sin\frac{\psi-\varphi}{2}$.

D'où résulte immédiatement que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les côtés T', T'' et T''' a pour diamètre le diamètre $2b$ de l'ellipse.

3. Supposons, en particulier, que le cercle K ait un rayon infiniment petit et se réduise à un foyer F de l'ellipse; nous pourrons énoncer la proposition suivante:

Soient a, b, c trois points d'une ellipse ayant pour foyer le point F; *considérons les cercles* A, B, C *qui, passant par le point* F, *ont respectivement pour centres les points a, b et c.*

Soit γ la longueur comprise entre les points de contact d'une tangente extérieure commune aux deux cercles A *et* B; *désignons par α et β les longueurs analogues relatives aux tangentes communes d'une part à* B *et* C *et d'autre part à* A *et* C.

Cela posé, si l'on construit un triangle ayant pour côtés α, β et γ, le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle est égal au petit axe de l'ellipse.

DES COURBES ALGÉBRIQUES QUI ONT PLUSIEURS AXES DE SYMÉTRIE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

On peut mettre sous une forme caractéristique l'équation des courbes algébriques qui admettent un nombre donné μ d'axes de symétrie sans en admettre davantage. Remarquons d'abord que, en vertu de théorèmes

connus, deux axes de l'une des courbes considérées ne peuvent être parallèles ni faire entre eux un angle incommensurable avec π sans que la courbe ait une infinité d'autres axes; ils doivent donc se couper sous un angle égal à $\frac{m\pi}{n}$, m et n étant des entiers premiers entre eux. Par le point de rencontre de ces axes je mène des droites faisant avec le premier les angles $\frac{m\pi}{n}$, $\frac{2m\pi}{n}$, ..., $\frac{m(n-1)\pi}{n}$; ces droites, dont l'une n'est autre que le second axe considéré, sont des axes de la courbe; les propriétés élémentaires des nombres prouvent qu'on a n droites distinctes, formant un faisceau dont les rayons successifs font entre eux l'angle $\frac{\pi}{n}$. Enfin, notre courbe ne peut avoir des axes qui concourent en deux points différents sans en avoir une infinité; en effet, par les points de rencontre des rayons des deux faisceaux, on pourrait mener d'autres axes dont les intersections entre eux et avec les premiers détermineraient de nouveaux centres de rayonnement, de nouveaux axes, et ainsi de suite indéfiniment. Les axes de la courbe cherchée doivent donc se couper sous des angles égaux à $\frac{\pi}{\mu}$, en un point que je prends pour origine de coordonnées rectangulaires.

Soit généralement $\varphi(x,y)=0$ l'équation d'une courbe de degré m; si l'on y change x et y en $\rho\cos\omega$ et $\rho\sin\omega$, et qu'on transforme les puissances de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$ ou leurs produits en sinus et cosinus de ω et de ses multiples, on obtient une équation de la forme

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &P_m\cos m\omega + Q_m\sin m\omega + \ldots + P_r\cos r\omega \\ &\qquad + Q_r\sin r\omega + \ldots + P_0 = 0, \end{aligned} \right.$$

P_r et Q_r étant des polynômes bien déterminés qui contiennent ρ avec les exposants r, $r+2$, $r+4$, ..., jusqu'à $m+1$ exclusivement.

Supposons que $\varphi(x,y)=0$ représente la courbe que j'étudie, et que l'axe des x soit un de ses axes de symétrie; $\varphi(x,y)$ ne renfermera que des puissances paires de y, et sa transformée en ρ et ω ne contiendra que des puissances paires de $\sin\omega$; elle se réduira donc à une fonction entière de $\cos\omega$, dont les puissances, on le sait, peuvent s'exprimer à l'aide des cosinus de ω et de ses multiples, à l'exclusion des sinus, et, comme la forme de l'équation (1) est bien déterminée, elle doit se réduire dans tous les cas à

$$P_m \cos m\omega + \ldots + P_r \cos r\omega + \ldots + P_0 = 0,$$

les Q_r étant nuls. Il y a plus: si l'on change ω en $\omega' + \frac{\pi}{\mu}$, cette équation devient

$$\Sigma P_r \left(\cos r\omega' \cos \frac{r\pi}{\mu} - \sin r\omega' \sin \frac{r\pi}{\mu}\right) = 0;$$

or cela revient à prendre pour nouvel axe polaire une droite qui fait avec le premier l'angle $\frac{\pi}{\mu}$ et par rapport à laquelle la courbe est encore symétrique; la nouvelle équation ne devra pas renfermer de sinus, et cela exige que P_r soit identiquement nul, à moins que r ne soit un multiple de μ. En définitive, les courbes cherchées peuvent se représenter en coordonnées polaires par une équation dont la forme générale est

$$(2) \qquad P_0 + P_\mu \cos \mu\omega + P_{2\mu} \cos 2\mu\omega + \ldots = 0.$$

Dans le cas où l'axe des x ferait partie de la courbe, φ pourrait renfermer des puissances impaires de y; mais en le supposant débarrassé des facteurs qui, égalés à zéro

représenteraient quelques-uns des axes de symétrie et qui sont faciles à reconnaître, on est ramené à la règle générale.

Étudions, parmi les courbes considérées, celles dont le degré a la plus petite valeur possible; cette valeur est μ, sinon l'équation (2) se réduirait à $P_0 = 0$ et représenterait un système de cercles avec une infinité d'axes.

Quand on suppose $\mu = m$, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad P_0 + P_m \cos m\omega = 0.$$

En nous rappelant la forme de P_0 et de P_m, nous voyons que cette équation donne pour $\cos m\omega$, quand m est impair, une valeur telle que

$$(4) \qquad \cos m\omega = \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^3} + \ldots + \frac{l}{\rho^m} = f(\rho).$$

Faisons croître ρ de zéro à l'infini; la forme de la courbe dépend de la manière dont variera $f(\rho)$, et il sera commode, pour étudier ses variations, de construire le lieu des points dont l'abscisse serait ρ, l'ordonnée $f(\rho)$. Quand ρ est très petit, $f(\rho)$ est très grand et ne peut représenter un cosinus; la courbe ne passe pas au pôle, à moins qu'elle ne se réduise à un faisceau de droites. Il y a toujours une valeur ρ_1 de ρ telle que $f(\rho_1) = \pm 1$, et à laquelle correspondent m points de la courbe, situés sur les axes à la distance ρ_1 du pôle; à chaque valeur de ρ qui rend $f(\rho) < 1$ en valeur absolue correspondent $2m$ points de la courbe; enfin, à partir d'une certaine grandeur de ρ, $f(\rho)$ tend constamment vers zéro et ω vers les m valeurs $\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m}$, où l'on suppose k égal à l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, m-1$. La distance δ du pôle à l'asymptote qui fait l'angle α_k avec l'axe po-

laire est

$$\delta = \lim \frac{\sin(\alpha_k - \omega)}{\frac{1}{\rho}} = \lim \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}.$$

Mais l'équation (4) donne

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{1}{m \sin m\omega}\left(\frac{a}{\rho^2} + \frac{3b}{\rho^4} + \ldots\right);$$

substituant dans δ, faisant $\rho = \infty$, $\omega = \alpha_k$, on trouve $\delta = \frac{a}{m}$.

La perpendiculaire à l'asymptote faisant l'angle $(k+1)\frac{\pi}{m}$ avec l'axe polaire est un axe de symétrie; il est aisé d'en conclure que l'asymptote a par rapport à la courbe la position qui caractérise une tangente d'inflexion à l'infini. On voit aussi facilement qu'aux valeurs négatives de ρ correspondent des points déjà fournis par les valeurs positives.

Quand m est pair, la valeur de $\cos m\omega$ est de la forme

$$\cos m\omega = a + \frac{b}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^4} + \ldots + \frac{l}{\rho^m};$$

la courbe présente des propriétés analogues à celles du cas précédent, mais les points à l'infini et même tous les points de la courbe peuvent être imaginaires; quand les points à l'infini sont réels, il y a m asymptotes qui passent au pôle. Ce pôle est centre de la courbe.

Il est assez facile de trouver les foyers des courbes précédentes; je me borne à considérer le cas de $m = 3$, et je donne à l'équation (3) la forme

$$2\rho^3 \cos 3\omega + 3a\rho^2 + b = 0.$$

L'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires peut s'écrire

$$(5) \quad (x + iy)^3 + (x - iy)^3 + 3a(x + iy)(x - iy) + b = 0.$$

Pour que le point de coordonnées α, β soit un foyer, il faut que la droite

$$(6) \qquad x + iy = \alpha + i\beta$$

touche la courbe; pour exprimer cette condition, je forme une combinaison homogène des équations (5) et (6), soit

$$(x+iy)^3 + (x-iy)^3 + 3a\frac{(x+iy)^2(x-iy)}{\alpha+i\beta} + \frac{b(x+iy)^3}{(\alpha+i\beta)^3} = 0.$$

Cette équation doit fournir deux valeurs égales pour le rapport $\frac{y}{x}$, et par suite pour $\frac{x-iy}{x+iy}$; en appliquant la condition d'égalité de deux des racines de l'équation du troisième degré, on trouve

$$4a^3(\alpha+\beta i)^3 + [(\alpha+\beta i)^3 + b]^2 = 0.$$

En désignant par ε une des racines cubiques imaginaires de l'unité, on voit que le premier membre de cette équation est un produit de six facteurs de la forme

$$(\alpha+\beta i - \sqrt[3]{u'})(\alpha+\beta i - \varepsilon\sqrt[3]{u'})\ldots(\alpha+\beta i - \varepsilon^2\sqrt[3]{u''}) = 0.$$

L'équation $x - iy = \alpha - i\beta$ doit aussi représenter une tangente à la courbe; on est conduit à égaler à zéro un produit de six facteurs, différant des précédents par le changement de i en $-i$. En associant de toutes les manières possibles les facteurs de l'un et de l'autre produit qu'on annule, on trouve les trente-six foyers de la cubique. Les associations qui donnent des foyers réels dépendent d'une manière simple de la réalité ou de la non-réalité de u' et u'', dont on a sans peine deviné la définition.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. CH. BIEHLER.

[SUITE (1)].

IV.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX FONCTIONS HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ.

9. Nous allons maintenant appliquer la méthode précédente, ainsi que les résultats obtenus relativement à la théorie des équations linéaires, à l'étude d'une propriété importante des fonctions homogènes du second degré.

Considérons la fonction homogène

$$\begin{aligned} f = &\ (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n)x_1 \\ &+ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n)x_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n)x_n, \end{aligned}$$

avec la condition $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$; et cherchons la condition pour que la fonction f, qui est en général décomposable en une somme de n carrés de fonctions linéaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit décomposable en une somme d'un nombre moindre de carrés, p par exemple, de telle sorte que l'on ait

$$(12) \qquad f = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_p^2,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ sont des fonctions linéaires des va-

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 311.

riables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$Y_1 = \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n}x_n,$$
$$Y_2 = \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n}x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Y_p = \alpha_{p,1}x_1 + \alpha_{p,2}x_2 + \ldots + \alpha_{p,n}x_n.$$

Posons, pour abréger,

$$\tfrac{1}{2}f'_{x_1} = X_1, \quad \tfrac{1}{2}f'_{x_2} = X_2, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2}f'_{x_n} = X_n,$$

on aura

$$X_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n,$$
$$X_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X_n = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de l'équation (12), successivement par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il viendra

$$X_1 = \alpha_{1,1}Y_1 + \alpha_{2,1}Y_2 + \ldots + \alpha_{p,1}Y_p,$$
$$X_2 = \alpha_{1,2}Y_1 + \alpha_{2,2}Y_2 + \ldots + \alpha_{p,2}Y_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X_n = \alpha_{1,n}Y_1 + \alpha_{2,n}Y_2 + \ldots + \alpha_{p,n}Y_p.$$

Si, dans ces identités, on remplace par zéro $n - p - 1$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il restera, dans les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, $p+1$ de ces variables; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ seront des fonctions homogènes de $(p+1)$ variables, que nous désignerons par $Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_p$; par suite, les équations $Y'_1 = 0$, $Y'_2 = 0, \ldots, Y'_p = 0$ formeront un système de p équations homogènes à $p+1$ variables, et elles admettront une infinité de solutions, d'après ce qui a été démontré (III); il existe donc une infinité de manières d'annuler les fonctions $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$ (nous désignons ainsi les fonctions qui proviennent de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ quand on a remplacé par zéro les $n-p-1$ variables dont il a été question).

Si l'on considère $p+1$ des équations $X_1 = o$, $X_2 = o$, ..., $X_n = o$, ces équations formant un système de $p+1$ équations homogènes à $p+1$ inconnues qui admet pour ces inconnues des valeurs différentes de zéro, le déterminant d'ordre $p+1$ des coefficients des inconnues est donc nul.

On voit donc que, en égalant à zéro successivement les variables qui entrent dans toutes les combinaisons possibles de $n-p-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et en formant tous les systèmes possibles de $p+1$ équations au moyen des équations analogues à $X_1 = o$, $X_2 = o$, ..., $X_n = o$, on ferait voir que tous les déterminants mineurs d'ordre $p+1$ du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

sont nuls, et par suite aussi tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à $p+1$. Δ est l'invariant de la fonction f. On a donc cette proposition :

Si une fonction homogène f du second degré de n variables est réductible à une somme de p carrés ($p < n$), l'invariant Δ de cette fonction ainsi que tous les déterminants mineurs de Δ jusqu'à l'ordre $p+1$ inclusivement sont nuls.

Inversement, si l'invariant Δ de la fonction f est nul, ainsi que tous les mineurs de Δ jusqu'à l'ordre $p+1$, et qu'un mineur d'ordre p de Δ ne soit pas nul, la fonction f sera réductible à une somme de p carrés de fonctions linéaires des n variables qui entrent dans f, et elle ne sera pas réductible à un nombre moindre de carrés.

Supposons, pour fixer les idées, que le déterminant

d'ordre p,

$$\begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & \dots & a_{1,\lambda} \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & \dots & a_{2,\lambda} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,\alpha} & a_{p,\beta} & \dots & a_{p,\lambda} \end{vmatrix},$$

soit différent de zéro, et considérons le déterminant d'ordre $p+1$, mineur de Δ,

$$(\gamma) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & \dots & a_{1,\lambda} & a_{1,\mu} \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & \dots & a_{2,\lambda} & a_{2,\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,\alpha} & a_{p,\beta} & \dots & a_{p,\lambda} & a_{p,\mu} \\ a_{p+\nu,\alpha} & a_{p+\nu,\beta} & \dots & a_{p+\nu,\lambda} & a_{p+\nu,\mu} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est nul par hypothèse, ainsi que le suivant,

$$(\gamma') \qquad \begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & \dots & a_{1,\lambda} & X_1 \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & \dots & a_{2,\lambda} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,\alpha} & a_{p,\beta} & \dots & a_{p,\lambda} & X_p \\ a_{p+\nu,\alpha} & a_{p+\nu,\beta} & \dots & a_{p+\nu,\lambda} & X_{p+\nu} \end{vmatrix},$$

qui lui est identique.

On en déduit, en faisant sur les rangées de (γ) l'opération faite précédemment sur les colonnes de (γ),

$$(\gamma'') \qquad \begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & \dots & a_{1,\lambda} & X_1 \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & \dots & a_{2,\lambda} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,\alpha} & a_{p,\beta} & \dots & a_{p,\lambda} & X_p \\ U_\alpha & U_\beta & \dots & U_\lambda & \Phi \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} U_\alpha &= X_\alpha - a_{p+1,\alpha}x_{p+1} - a_{p+2,\alpha}x_{p+2} - \dots - a_{n,\alpha}x_n, \\ U_\beta &= X_\beta - a_{p+1,\alpha}x_{p+1} - a_{p+2,\beta}x_{p+2} - \dots - a_{n,\beta}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_\lambda &= X_\lambda - a_{p+1,\lambda}x_{p+1} - a_{p+2,\lambda}x_{p+2} - \dots - a_{n,\lambda}x_n, \\ \Phi &= f - X_{p+1}\,x_{p+1} - X_{p+2}\,x_{p+2} - \dots - X_n \end{aligned}$$

Les déterminants de la forme (γ') étant tous nuls, on voit qu'en décomposant (γ'') en une somme de déterminants d'ordre $p+1$ de la forme (γ'), l'équation (γ'') se réduit à

$$(\gamma''')\qquad \begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & \dots & a_{1,\lambda} & X_1 \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & \dots & a_{2,\lambda} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,\alpha} & a_{p,\beta} & \dots & a_{p,\lambda} & X_p \\ X_\alpha & X_\beta & \dots & X_\lambda & f \end{vmatrix} = 0;$$

les fonctions $X_\alpha, X_\beta, \dots, X_\lambda$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1, X_2, \dots, X_p$, car le déterminant (γ') est nul; par suite, l'équation précédente nous montre que f est une fonction homogène du second degré de $X_1, X_2, \dots, X_p$. Cette fonction est, comme l'on sait, décomposable en une somme de p carrés de fonctions linéaires de $X_1, X_2, \dots, X_p$. Je dis que ce nombre de carrés ne sera pas inférieur à p.

On aurait, en effet, dans ce cas

$$(13)\qquad f = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_{p-1}^2,$$

où $Z_1, Z_2, \dots, Z_{p-1}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1, X_2, \dots, X_p$, par suite de $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \beta_{1,1}x_1 + \beta_{1,2}x_2 + \dots + \beta_{1,n}x_n, \\ Z_2 &= \beta_{2,1}x_1 + \beta_{2,2}x_2 + \dots + \beta_{2,n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Z_{p-1} &= \beta_{p-1,1}x_1 + \beta_{p-1,2}x_2 + \dots + \beta_{p-1,n}x_n, \end{aligned}$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de l'identité (13), il viendra

$$\begin{aligned} X_1 &= \beta_{1,1}Z_1 + \beta_{2,1}Z_2 + \dots + \beta_{p-1,1}Z_{p-1}, \\ X_2 &= \beta_{1,2}Z_1 + \beta_{2,2}Z_2 + \dots + \beta_{p-1,2}Z_{p-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_n &= \beta_{1,n}Z_1 + \beta_{2,n}Z_2 + \dots + \beta_{p-1,n}Z_{p-1}. \end{aligned}$$

En donnant à $n-p$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la valeur zéro, $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p-1}$ deviennent des fonctions de p variables que nous désignerons par X'_1, $X'_2, \ldots, X'_n$, Z'_1, $Z'_2, \ldots, Z'_{p-1}$. Les équations $Z'_1 = 0$, $Z'_2 = 0, \ldots, Z'_{p-1} = 0$, homogènes à p variables, admettent une infinité de solutions ; par suite, $X'_1 = 0$, $X'_2 = 0, \ldots$, $X'_n = 0$ admettent aussi une infinité de solutions; on en conclut, de la même manière que précédemment, que tous les déterminants mineurs d'ordre p de Δ sont nuls. Cette conclusion est contraire à l'hypothèse que nous avons faite, à savoir qu'un déterminant d'ordre p de Δ est différent de zéro; par conséquent, la fonction f n'est pas réductible à $p-1$ carrés.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on désigne par Δ l'invariant d'une fonction homogène du second degré, et s'il existe un déterminant mineur de Δ d'ordre p qui ne soit pas nul, les déterminants mineurs de Δ d'ordre supérieur à p étant tous nuls, la fonction homogène f sera réductible à une somme de p carrés, et ce nombre p représente le nombre minimum de carrés auxquels la fonction f est réductible.*

Ce théorème nous donne aussi les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction f, homogène et du second degré, des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soit décomposable en un produit de facteurs linéaires en x_1, $x_2, \ldots, x_n$, savoir

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n).$$

Il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que tous les déterminants mineurs du troisième ordre de l'invariant Δ de f soient nuls, sans que les mineurs du deuxième ordre soient tous nuls.

Le théorème précédent montre encore que les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction f soit le carré d'une fonction linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'obtiennent en égalant à zéro tous les mineurs du deuxième ordre de Δ.

FORMULES DE RÉDUCTION TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

---

1. Théorème. — *Dans toute relation qui a lieu entre les trois angles* A, B, C *d'un triangle, on peut remplacer ces angles : 1° par les compléments de leurs moitiés; 2° par les suppléments de leurs doubles.*

En effet, puisque

$$A + B + C = \pi,$$

on a aussi 1°

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{A + B + C}{2} = \pi;$$

et 2°

$$(\pi - 2A) + (\pi - 2B) + (\pi - 2C) = 3\pi - 2(A + B + C) = \pi.$$

2. Appliquons ce principe aux deux formules bien connues et souvent employées

$$\text{(I)} \qquad \sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C.$$

Si nous y remplaçons les angles A, B, C par les com-

pléments $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}, \frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}, \frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ de leurs moitiés, elles deviendront

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \\ &= 4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right), \end{aligned} \right.$$

$$\text{(IV)} \qquad \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

Cette dernière formule se trouve déjà établie, par un autre procédé, dans la *Trigonométrie* ([1]) de Frédéric Prosz, professeur à l'École polytechnique de Stuttgard.

Si, dans les relations (I) et (II), nous substituons aux angles A, B, C les suppléments de leurs doubles, elles se changeront dans les suivantes :

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \\ &\qquad = 4\sin A\sin B\sin C, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(VI)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C \\ &\qquad = \tan 2A\tan 2B\tan 2C. \end{aligned} \right.$$

3. Avant de pousser ces applications plus loin, établissons une relation qui découle de la formule (I) et qui a son importance.

Nous avons

$$2\sin A = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

ou

$$2\sin A = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

retranchant cette égalité membre à membre de (I), il

([1]) *Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie*, von F. Prosz; Stuttgard, Paul Neff, 1840; p. 47.

nous vient

$$(\text{VII})\qquad \sin B + \sin C - \sin A = 4 \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\quad [1].$$

En y faisant nos substitutions d'angles (nº 1), nous en tirons les nouvelles formules

$$(\text{VIII})\quad \begin{cases} \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} - \cos\frac{A}{2} \\ \quad = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right), \end{cases}$$

$$(\text{IX})\qquad \sin 2B + \sin 2C - \sin 2A = 4\cos B\cos C\sin A.$$

4. Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* de M. Catalan [2], M. Brocard a déduit de la formule (II) l'égalité des trois rapports, dont le premier est

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}.$$

Nous allons faire voir que la valeur de ce rapport est symétrique par rapport aux trois angles A, B, C.

En effet, puisque

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C} = \frac{2\sin A\cos A\cos B\cos C}{\sin B\cos C + \sin C\cos B} = \frac{\sin A\, 2\cos A\cos B\cos C}{\sin(B+C)}$$

et que $\sin A = \sin(B+C)$, le rapport précédent a pour valeur

$$2\cos A\cos B\cos C,$$

et, comme cette expression ne change pas par la permutation circulaire des trois angles A, B, C, nous avons

---

[1] Cette formule se trouve aussi dans la *Trigonométrie* de Prosz, p. 43.

[2] Septembre 1879, p. 324.

les relations

$$
(\text{X})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin 2A}{\tang B + \tang C} = \frac{\sin 2B}{\tang C + \tang A} \\ &= \frac{\sin 2C}{\tang A + \tang B} = 2 \cos A \cos B \cos C. \end{aligned} \right.
$$

On trouverait par la même méthode que

$$
(\text{XI})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin 2A}{1 - \cot B \cot C} = \frac{\sin 2B}{1 - \cot C \cot A} = \frac{\sin 2C}{1 - \cot A \cot B} \\ &= 2 \sin A \sin B \sin C. \end{aligned} \right.
$$

De ces formules, on tire les suivantes

$$
(\text{XII})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\tang B + \tang C}{1 - \cot B \cot C} = \frac{\tang C + \tang A}{1 - \cot C \cot A} \\ &= \frac{\tang A + \tang B}{1 - \cot A \cot B} = \tang A \tang B \tang C. \end{aligned} \right.
$$

5. Dans les relations (X), (XI) et (XII), remplaçons les angles A, B, C par les compléments respectifs de leurs moitiés. Ces relations deviennent

$$
(\text{XIII})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin A}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} = \frac{\sin B}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}} \\ &= \frac{\sin C}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \end{aligned} \right.
$$

$$
(\text{XIV})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin A}{1 - \tang \frac{B}{2} \tang \frac{C}{2}} = \frac{\sin B}{1 - \tang \frac{C}{2} \tang \frac{A}{2}} \\ &= \frac{\sin C}{1 - \tang \frac{A}{2} \tang \frac{B}{2}} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \end{aligned} \right.
$$

$$(\text{XV})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{1-\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2}}=\frac{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}}{1-\tang\frac{C}{2}\tang\frac{A}{2}}\\ &=\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}{1-\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}. \end{aligned}\right.$$

6. D'autres formules méritent d'être signalées au lecteur; nous nous permettrons de citer les suivantes:

$$(\text{XVI})\quad \left\{\begin{aligned} &\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=2\sin B\sin C\cos A,\\ &\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{A}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}, \end{aligned}\right.$$

$$(\text{XVII})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B}=\frac{\tang B}{\tang C},\\ &\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{\tang\frac{C}{2}}{\text{ang}\frac{B}{2}}, \end{aligned}\right.$$

$$(\text{XVIII})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}=\cot A+\cot B+\cot C,\\ &\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\ &=\tang\frac{A}{2}+\tang\frac{B}{2}+\tang\frac{C}{2}, \end{aligned}\right.$$

$$(\text{XIX})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2},\\ &\frac{2\sin 2A\sin 2B\sin 2C}{(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)^2}=\cot A\cot B\cot C, \end{aligned}\right.$$

$$
(\text{XX})\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}},\\
&\frac{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)^2}\\
&\qquad = \frac{\tang\frac{A}{2} + \tang\frac{B}{2} + \tang\frac{C}{2}}{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

PAR M. WEILL.

Avant d'étudier les propriétés dont il s'agit, et qui sont relatives à un triangle qui se déplace en restant inscrit à une conique et circonscrit à une parabole, il est nécessaire de dire quelques mots de l'involution du troisième ordre.

Considérons l'équation

$$t^3 + \lambda t^2 + (A\lambda + B)t + C\lambda + D = 0.$$

Quand λ varie dans cette équation, t prend à chaque instant trois valeurs déterminées; nous dirons que ces trois valeurs forment une involution du troisième ordre.

Considérons deux racines t et t_1 de l'équation, correspondant à une même valeur de λ, on aura la relation

$$\frac{t^3 + Bt + D}{t_1^3 + Bt_1 + D} = \frac{t^2 + At + C}{t_1^2 + At_1 + C},$$

d'où l'on tire

$$
\begin{aligned}
0 = {} & t^2 t_1^2 + A t t_1 (t + t_1)\\
& + C(t^2 + t_1^2) + (C - B) t t_1 - D(t + t_1) + BC - AD.
\end{aligned}
$$

Si l'on considère les trois valeurs t, t_1, t_2 correspondant à une même valeur de λ, la relation symétrique que nous venons de trouver aura lieu entre deux quelconques d'entre elles, de manière que, si t_1 désigne l'une des valeurs, la fonction symétrique du second degré par rapport à t aura pour racines t et t_2.

Dès lors, tout groupe de trois variables liées entre elles de telle manière qu'à l'une *quelconque* des trois correspondent les deux autres pourra être représenté par une équation du troisième degré dont les coefficients sont des *fonctions linéaires* du paramètre qui définit le groupe considéré.

Ces notions sommaires sur ce sujet important nous suffiront pour ce qui va suivre.

Si l'on considère un triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, et si les coordonnées d'un sommet sont définies *rationnellement* en fonction d'un paramètre t, les trois valeurs de ce paramètre correspondant à une position du triangle formeront une involution du troisième ordre.

Appliquons cette notion à la parabole, en considérant un triangle variable inscrit dans une conique fixe et circonscrit à la parabole.

Soit

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

l'équation d'une tangente à la parabole; m et m' désignant les coefficients angulaires de deux tangentes, et x, y les coordonnées du point de rencontre, on a

$$x = \frac{p}{2}\,\frac{1}{mm'}, \quad y = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

Considérons trois tangentes formant un triangle qui

se déplace en restant circonscrit à la parabole et inscrit dans une conique fixe; les points de contact des côtés avec la parabole forment une involution du troisième ordre, et l'on peut prendre la quantité $\frac{1}{m}$ pour définir cette involution. Dès lors, on a la relation

$$\frac{1}{m^3} + \lambda \frac{1}{m^2} + (A\lambda + B)\frac{1}{m} + C\lambda + D = 0.$$

Les coordonnées (X, Y) du centre de gravité du triangle sont données par les relations

$$3X = \frac{p}{2}\sum \frac{1}{mm'} = \frac{p}{2}(A\lambda + B),$$

$$3Y = \frac{p}{2}\sum\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) = -p\lambda.$$

Le lieu du centre de gravité est donc une ligne droite quand λ varie, c'est-à-dire quand le triangle se déplace. On a donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, son centre de gravité décrit une ligne droite.*

Cette droite, lieu du centre de gravité, forme un faisceau harmonique avec la direction de l'axe de la parabole et les directions asymptotiques de l'autre conique. Pour le démontrer, il suffit de faire une projection perspective, ce qui donne un théorème facile à trouver.

Considérons un triangle qui se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, et proposons-nous de calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit.

Désignons par x', y', x'', y'', x''', y''' les coordonnées des points de contact des côtés avec la parabole et par

α', β', α'', β'', α''', β''' celles des sommets du triangle, on aura les relations

$$\left\{\begin{array}{l} y'+y''=2\beta''', \\ y'y''=2p\alpha''', \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y'+y'''=2\beta'', \\ y'y'''=2p\alpha''. \end{array}\right.$$

La perpendiculaire au milieu de l'un des côtés du triangle a pour équation

$$\frac{y-\frac{\beta''+\beta'''}{2}}{x-\frac{\alpha''+\alpha'''}{2}}=\frac{\alpha''-\alpha'''}{\beta'''-\beta''}.$$

Cette équation devient, quand on y remplace α'', α''', β'', β''' par leurs valeurs et quand on désigne par S la quantité $y'+y''+y'''$,

$$2y-S-y'+\frac{y'}{p}\left[2x-\frac{y'(S-y')}{2p}\right]=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(1)\qquad y'^3-Sy'^2+y'(4px-2p^2)+2p^2(2y-S)=0.$$

En remplaçant y' par y'' et y''', on aurait les équations des perpendiculaires aux milieux des deux autres côtés du triangle; donc l'équation que nous venons d'écrire, si l'on y considère y' comme l'inconnue, admet pour solutions y', y'', y'''; or ces trois ordonnées forment, quand le triangle se déplace, une involution du troisième ordre; on a donc entre elles une équation de la forme suivante

$$(2)\qquad y'^3-Sy'^2+(AS+B)y'+CS+D=0.$$

Cette équation doit être identique avec l'équation (1); on a donc les relations

$$4px-2p^2=AS+B,$$
$$2p^2(2y-S)=CS+D.$$

En éliminant le paramètre S entre ces deux équations, on trouve une ligne droite pour le lieu du centre du cercle circonscrit ; on a donc le théorème suivant :

Théorème II. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, le centre du cercle circonscrit au triangle décrit une ligne droite.*

Le cercle circonscrit passe au foyer de la parabole ; il passe donc par un deuxième point fixe. Faisons une projection perspective ; nous aurons le théorème suivant :

Théorème III. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit à une conique* C *et circonscrit à une conique* P, *si l'on considère les coniques passant par les trois sommets du triangle et deux points fixes* I *et* J *situés sur une tangente à la conique* P, *ces coniques passent par deux autres points fixes.*

L'un de ces points fixes est le point F, intersection des tangentes menées des points I et J à la conique P. Pour avoir l'autre point fixe, prolongeons la droite IJ jusqu'aux points où elle rencontre la conique C, et de ces points menons à la conique P deux tangentes qui se rencontrent en un point K de la conique C ; la droite FK rencontre la conique C en un deuxième point G : c'est ce point qui est le deuxième point fixe, comme un raisonnement aisé permet de le reconnaître.

De ces remarques on déduit le théorème suivant :

Théorème IV. — *Quand une conique est telle qu'un triangle circonscrit à une parabole soit inscrit à la conique, les tangentes menées à la parabole parallèlement aux asymptotes de la conique se rencontrent en un point* K *de cette courbe. La droite* FK *qui joint le*

foyer de la parabole à ce point K *rencontre la conique en un deuxième point* G. *Le cercle circonscrit au triangle variable passe par le point* G.

On démontre aisément la réciproque de ces théorèmes, et l'on arrive au résultat que nous allons énoncer:

Théorème V. — *Lorsqu'une conique passe par quatre points fixes* F, I, J, G, *le point* G *étant situé sur une conique fixe* C, *le triangle variable* ABC *formé par les trois points de rencontre de cette conique fixe avec la conique variable reste inscrit et circonscrit à deux coniques fixes* C *et* P. *La conique* P *est tangente à neuf droites remarquables; ces droites sont :* 1° *les trois côtés du triangle* FIJ; 2° *les six droites obtenues en joignant respectivement les points de rencontre des côtés de ce triangle avec la conique* C *aux trois points où cette même conique est rencontrée par les droites* GF, GI, GJ (*abstraction faite du point* G).

Le théorème corrélatif est le suivant:

Théorème VI. — *On considère une conique et quatre droites, dont l'une* ABC *est tangente à la conique; soient* A, B, C, A′, B′, C′ *les six sommets du quadrilatère, les lettres se correspondant sur les diagonales; les tangentes communes à la conique fixe et à une conique variable tangente aux quatre droites forment un triangle variable qui reste circonscrit à la conique donnée et inscrit dans une conique fixe. Cette dernière conique passe par neuf points remarquables, qui sont les sommets des triangles formés par les tangentes menées à la conique donnée par les couples de points correspondants* (A, A′), (B, B′), (C, C′).

Les théorèmes que nous venons d'établir donnent un

grand nombre de théorèmes particuliers. Nous citerons les suivants :

Théorème VII. — *Quand un triangle* ABC *se déplace en restant inscrit à une conique* C *et circonscrit à une conique* P, *si l'on considère la conique inscrite dans le triangle et ayant pour foyer un point fixe de la conique* C, *le deuxième foyer de cette conique variable décrit une droite.*

Considérons une droite, et de chacun des points de cette droite menons des normales à une parabole; le triangle formé par les pieds de ces trois normales forme un système de trois points en involution; donc ses côtés sont tangents à une conique fixe P'.

Considérons le cercle passant par les pieds des normales; ce cercle peut être considéré comme une conique passant par deux points fixes I et J situés sur une tangente à la conique P' et par les sommets d'un triangle en involution sur la conique P; donc le cercle passe par deux autres points fixes; le triangle variable est inscrit dans la parabole P tangente à la droite IJ et circonscrit à la parabole P' tangente à cette même droite. Les deux points fixes dont il s'agit sont le point G, situé sur la parabole P, et qui n'est autre que le sommet de cette courbe, et l'autre est le foyer de la parabole P'. La droite qui joint le sommet de la parabole P au foyer de la parabole P' rencontre la parabole P en un point K; ce point est le sommet d'un *triangle aplati* inscrit dans P et circonscrit à P'; les côtés de ce triangle sont formés par la tangente au point K à la conique P', et cette tangente passe au point de contact de la conique P avec la droite IJ. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si de deux points on mène les trois*

normales à une parabole, les cercles circonscrits aux deux triangles formés par les pieds passent par le sommet S *de la parabole et par un autre point* F_1; *ce point est le foyer d'une parabole tangente aux six côtés des deux triangles; la droite* $F_1 S$ *passe par un point commun aux deux paraboles, et la tangente en ce point à la seconde courbe est parallèle à l'axe de la première.*

Théorème IX. — *Si l'on considère un triangle* ABC *et une parabole, et si l'on mène à la parabole une tangente parallèle au côté* BC *et des tangentes par le point* A, *les sommets des trois triangles obtenus en faisant cette construction relativement aux trois sommets du triangle* ABC, *sont neuf points sur une même conique.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de reprendre le théorème VI en supposant que la tangente fixe soit la droite de l'infini.

Quand l'un des côtés du triangle ABC est tangent à la parabole, la conique dégénère en deux droites.

Reprenons l'étude d'un triangle qui se déplace en restant inscrit dans une conique quelconque et circonscrit à une parabole. Nous avons démontré que le point O, centre du cercle circonscrit au triangle, décrit une droite L, et que le point G, centre de gravité, décrit une autre droite M. On sait, d'après le théorème de Steiner, que le point de concours H des hauteurs du triangle décrit la directrice D. D'ailleurs, les trois points O, G, H sont en ligne droite, et l'on a $GH = 2GO$. Donc la droite OGH se déplace de manière que les trois points O, G, H se meuvent sur trois droites fixes, le segment GH étant constamment double du segment GO.

Dès lors, cette droite, d'après un théorème facile à établir, enveloppe une parabole tangente aux trois droites fixes ; de plus, tout point qui divise le segment OH dans un rapport donné décrit aussi une droite tangente à la parabole. En particulier, le centre I du cercle des neuf points du triangle décrit une droite fixe R.

Proposons-nous de trouver l'enveloppe du cercle des neuf points du triangle.

Rappelons-nous que le cercle circonscrit au triangle passe par deux points fixes et que son rayon est double de celui du cercle des neuf points. Le problème se pose alors ainsi :

Étant données trois droites fixes L, R, D *et une droite mobile* OIH *divisée au point* I *en deux parties égales, on joint le point* O *à un point fixe* F *et on décrit du point* I *comme centre un cercle avec* $\frac{\text{OF}}{2}$ *comme rayon : trouver l'enveloppe de ce cercle.*

Un calcul très simple montre immédiatement que l'enveloppe est une conique. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème X. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, le cercle des neuf points du triangle reste doublement tangent à une conique fixe.*

En faisant une projection perspective, on a le théorème suivant :

Théorème XI. — *Si l'on considère un triangle variable inscrit dans une conique* C *et circonscrit à une conique* P, *la conique qui passe par deux points fixes* I, J *situés sur une tangente à la conique* P *et par les trois points*

conjugués harmoniques des couples de sommets du triangle par rapport aux trois points de rencontre des côtés de ce triangle et de la droite fixe IJ *est doublement tangente à une conique fixe ; la corde des contacts pivote autour d'un point fixe situé sur la droite* IJ. *Quand les deux points* I *et* J *sont sur la conique* C, *l'enveloppe se compose de deux droites se coupant en un point de la droite* IJ.

Le théorème corrélatif se trouve facilement et donne lieu à des cas particuliers, comme le précédent.

Nous allons maintenant étudier les *triangles aplatis* inscrits et circonscrits à deux coniques. Considérons deux coniques quelconques C et P ; soient A un point commun aux deux courbes et AB la tangente à la courbe P ; cette droite rencontre la courbe C en un second point B ; si la tangente en B à la courbe C est tangente commune aux deux coniques, la droite AB constituera un *triangle aplati* circonscrit à la courbe P et inscrit dans la courbe C ; dès lors, il existera une infinité de triangles inscrits et circonscrits à la fois aux deux coniques. Si l'on désigne par $\alpha = 0$, $\beta = 0$ les équations du côté AB et de la tangente commune correspondante, les coniques P et C auront respectivement pour équations

(1) $$K\alpha\beta - L\gamma^2 = 0,$$

(2) $$\beta(A\alpha + B\gamma) - C\alpha^2 = 0.$$

Les équations (1) et (2) représentent deux coniques telles qu'un triangle soit circonscrit à la première et inscrit à la seconde.

L'équation en λ correspondante est

$$L\lambda(A + \lambda K)^2 + B^2 C = 0.$$

Comme les coefficients de l'équation en λ sont des

invariants, nous pouvons identifier cette équation avec l'équation générale

$$\Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0.$$

On a ainsi

$$\Delta = K^2 L,$$
$$\Theta = 2LAK,$$
$$\Theta' = LA^2.$$

On en tire

$$\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0.$$

On retrouve ainsi, par un procédé d'une grande simplicité, la formule donnée par M. Cayley.

Revenons au système des deux coniques P et C. La condition pour qu'il existe un triangle circonscrit à la courbe P et inscrit dans la courbe C est que, si l'on considère un point A commun aux deux courbes, la tangente au point A à la courbe P rencontre la courbe C en un point de contact d'une tangente commune aux deux courbes; dans ce cas, d'après le théorème de Poncelet, la même propriété aura lieu pour les quatre points de rencontre des deux courbes, et l'on a le théorème suivant :

Théorème XII. — *Étant données deux coniques, si la tangente à l'une d'elles en un point commun rencontre l'autre en un point appartenant à une tangente commune aux deux coniques, la même propriété aura lieu relativement aux trois autres points d'intersection, et, par suite, les points communs aux deux courbes et les points de contact de l'une d'elles avec les quatre tangentes communes sont huit points qui se correspondent deux à deux.*

La traduction analytique de ce théorème fournit un théorème relatif à la transformation de l'équation du quatrième degré. Considérons, par exemple, le système

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880.

Composition de Mathématiques.

Voir l'énoncé à la page 337.

Composition de Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté est égal à $0^m,19$ et dont la face ABC est située dans le plan horizontal de projection.

Le point A est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD.

L'arête BD est parallèle aux génératrices d'un cylindre dont la trace horizontale est le cercle décrit du point B comme centre avec un rayon égal à $0^m,06$.

On demande de représenter en projection horizontale le corps qui reste lorsqu'on supprime, dans le tétraèdre, la partie comprise dans le cône et la partie comprise dans le cylindre.

On indiquera à l'encre rouge les constructions faites pour trouver un point de l'intersection du cône et du cylindre et la tangente en ce point.

Composition de calcul trigonométrique.

Étant donnés, dans un triangle, deux côtés et l'angle compris, savoir

$$a = 52837^m,23,$$
$$b = 45609^m,07,$$
$$C = 55^\circ\,17'\,48'',37,$$

calculer les deux angles A et B, le troisième côté c et la surface S.

Composition littéraire.

On suppose que, dans un pays envahi, au sein d'une place assiégée et à demi ruinée par un bombardement, une députation des habitants de la ville soit envoyée au général commandant la place pour essayer de l'apitoyer sur le sort de la ville qu'il est chargé de défendre.

Réponse du général.

Dans cette réponse (*qui fait seule l'objet de la composition*), celui-ci indiquera comment il comprend son rôle.

D'après Carnot, toutes les obligations de l'homme de guerre chargé de la défense d'une place se réduisent à deux :

1° Être dans la ferme résolution de périr plutôt que de la rendre ;

2° Connaître tous les moyens que fournit l'industrie pour en assurer la défense.

Il est sûr tout au moins de remplir la première de ces conditions.

Écoutant à la fois les inspirations de sa conscience et les leçons de l'Histoire, il fera, selon la lettre des Règlements, tout ce que le devoir et l'honneur militaire lui commandent.

CORRESPONDANCE.

Mon cher Brisse,

Les polynômes de M. Laguerre ont vivement intéressé, et à juste raison, les personnes qui s'occupent de la théorie des équations. Me sera-t-il permis de signaler une de leurs propriétés qui n'a pas encore été remarquée ?

Soit

$$
\begin{aligned}
f_m(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,\\
f_0(x) &= a_0,\\
f_1(x) &= a_0 x + a_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_n(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,\\
f_{n+1}(x) &= a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ désignant des coefficients constants. On tire des deux dernières formules

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= x f_n + a_{n+1},\\
f_n &= x f_{n-1} + a_n,
\end{aligned}
$$

d'où l'on conclut, en multipliant la première de ces équations par a_n, la seconde par a_{n+1}, et en retranchant,

$$f_{n+1} a_n = f_n (a_n x + a_{n+1}) - a_{n+1} f_{n-1}.$$

Nous supposerons $a_0, a_1, \ldots, a_m$ différents de zéro; nous pourrons alors écrire

$$f_{n+1} = f_n \left(x + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - \frac{a_{n-1}}{a_n} f_{n-1}.$$

Cette formule montre que 1° deux fonctions f_n ne peuvent pas s'annuler en même temps, sans quoi, si f_{n-1} et f_n s'annulaient ensemble, il faudrait que f_{n-1} s'annulât en même temps, et ainsi de suite jusqu'à $f_0 = a_0$, qui par hypothèse est différent de zéro; 2° lorsque la fonction f_n s'annule, f_{n+1} et $\frac{a_{n+1}}{a_n} f_{n-1}$ sont de signes contraires. Il en résulte que les fonctions

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
& f_m,\ f_{m-1},\ f_{m-2}\frac{a_m}{a_{m-1}},\ f_{m-3}\frac{a_{m-1}}{a_{m-2}},\ f_{m-4}\frac{a_{m-2}a_m}{a_{m-3}a_{m-1}},\\
& f_{m-5}\frac{a_{m-3}a_{m-1}}{a_{m-4}a_{m-2}},\ f_{m-6}\frac{a_{m-4}a_{m-2}a_m}{a_{m-5}a_{m-3}a_{m-1}},\ \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

jouissent de la propriété essentielle des fonctions de Sturm, en sorte que, si, dans la suite précédente, on substitue à la place de x deux nombres α et β, le nombre de variations perdues ou gagnées (ce nombre ne pouvant se perdre ou se gagner que par le terme f_n) sera une limite inférieure du nombre des racines comprises entre α et β.

Veut-on, par exemple, une limite inférieure du nombre des racines positives de $f_m(x) = 0$, on fera $x = 0$ et $x = \infty$ dans la suite (1); en supposant $a_0 > 0$, ce qui est permis, on aura deux suites dont les signes seront ceux des suites

$$a_m,\ a_{m-1},\ \frac{a_{m-2}a_m}{a_{m-1}},\ \frac{a_{m-3}a_{m-1}}{a_{m-2}},\ \frac{a_{m-4}a_{m-2}a_m}{a_{m-3}a_{m-1}},\ \ldots,$$

$$1,\ 1,\ \frac{a_m}{a_{m-1}},\ \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}},\ \frac{a_{m-2}a_m}{a_{m-3}a_{m-1}},\ \ldots,$$

ou même des suites

$$a_m,\ a_{m-1},\ a_m a_{m-1} a_{m-2},\ a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3},\ a_m a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3} a_{m-4},\ \ldots$$

$$1,\ 1,\ a_m a_{m-1},\ a_{m-1} a_{m-2},\ a_m a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3},\ \ldots.$$

Ce théorème, analogue à celui de Fourier, est beaucoup plus simple dans la pratique. H. LAURENT.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS, avec de nombreux exercices, par *P. Mansion,* professeur ordinaire de l'Université de Gand. Troisième édition. Mons, Hector Manceaux; Paris, Gauthier-Villars, 188 — Prix : 2 fr.

Ce petit Ouvrage, dont la première édition a paru en 18 en Belgique, la seconde en 1878 en Allemagne, renferme, so une forme aussi concise, aussi rigoureuse, aussi pratique q

possible, ce qui constitue vraiment les *Éléments de la théorie des déterminants*. Dans son cadre modeste, il répond mieux aux exigences de l'enseignement secondaire français que les Manuels plus étendus de Baltzer, Brioschi, Dostor et Salmon.

Le premier Chapitre est consacré *à la définition et aux propriétés immédiates des déterminants*. La définition des permutations paires ou impaires d'éléments à deux indices, qui sert *explicitement* de point de départ, est un peu différente de celle que l'on trouve ailleurs. « Une permutation $E_{a\alpha}$, $E_{b\beta}$, $E_{c\gamma}$,... est dite *paire* ou *impaire* suivant que le nombre des dérangements dans la série des premiers indices a, b, c,... et dans la série des seconds α, β, γ,... est pair ou impair. » Cette manière d'envisager les permutations paires ou impaires permet de simplifier considérablement la démonstration des premières propriétés des déterminants.

Le Chapitre II (*Calcul des déterminants*) est divisé en trois paragraphes : 1° propriétés des mineurs ; 2° principe de l'addition des lignes ; 3° sommes et produits de déterminants. Dans ce dernier paragraphe, il est fait constamment usage d'une notation déjà ancienne, $| a\, b\, c |$ pour $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$, dont M. Catalan a très bien fait ressortir toute l'utilité il y a plus de trente ans. Grâce à cette notation, on expose aisément la multiplication des déterminants par la méthode la plus naturelle, et l'on peut établir d'une manière *complète* et *rigoureuse* la propriété fondamentale des déterminants nuls : *Il existe au moins une même relation entre les éléments de chaque ligne d'un déterminant nul, même si ses premiers mineurs sont tous nuls aussi* (M. Falk). Jusqu'à présent on n'a prouvé cette proposition qu'en recourant à une théorie plus difficile, celle des équations linéaires.

Le Chapitre III contient les applications des déterminants à la résolution des équations linéaires et à l'élimination. Dans le premier paragraphe, la question de la résolution des équations linéaires est traitée minutieusement, qu'il y ait compatibilité ou incompatibilité, détermination ou indétermination dans le système. Tout en profitant de recherches savantes sur la matière dues à quelques professeurs français, l'auteur est parvenu à donner une forme élémentaire à cette subdivision de son Livre,

si importante au point de vue de l'enseignement. Dans le paragraphe suivant, la théorie de l'élimination entre n équations linéaires est exposée d'après M. Rouché; on y traite aussi la question analogue dans le cas où l'une des équations linéaires est remplacée par une équation du second degré, et l'on fait connaître, à propos du troisième degré, la célèbre transformation de Tchirnhausen. Enfin le dernier paragraphe du Livre, qui est aussi le plus original, est consacré à l'élimination entre deux équations algébriques de degré quelconque. En fondant ses propres recherches sur la matière avec celles de MM. Falk et Janni, l'auteur a pu exposer et généraliser, en sept pages in-8°, les méthodes de Sylvester et de Cauchy, et en montrer l'identité.

Les *Éléments de la théorie des déterminants* de M. Mansion renferment, outre les divers sujets dont nous venons de donner un aperçu, un très grand nombre d'exercices. Les uns, très simples et d'une difficulté graduée, sont destinés aux commençants. Les autres sont un vrai complément de la partie du Livre qui est imprimée en grand texte. C'est parmi les exercices de cette seconde catégorie que sont rejetés les propriétés des déterminants symétriques, gauches, etc., le théorème de Laplace et un grand nombre d'applications géométriques ou algébriques propres à faire ressortir la valeur de cet admirable instrument analytique qu'on appelle les *Déterminants*.

2. TROIS LETTRES INÉDITES DE JEAN Ier BERNOULLI A LÉONARD EULER, tirées de la Correspondance de *Jean Ier Bernoulli*, gardée dans la bibliothèque de l'Académie royale de Stockholm, par *Gustaf Eneström*. Stockholm, P.-A. Norstedt et Söner, 1880.

3. HUYGENS ET ROBERVAL. — Documents nouveaux; par *C. Henry*. Leyde, E.-Y. Brill, 1880.

4. ÉTUDES NOUVELLES DES LIGNES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; par *Émile Sourander*. Thèse de Doctorat présentée à la Faculté de Philosophie de l'Université d'Helsingfors. Helsingfors, J.-C. Frenckell et fils, 1879.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES BRACHISTOCHRONES;

PAR M. H. RESAL [1].

Cette théorie est motivée par la suppression, qui remonte à 1852, du Calcul des variations dans l'enseignement intérieur de l'École Polytechnique.

Elle est basée sur des considérations analogues à celles dont s'est servi Jacques Bernoulli pour déterminer la nature de la courbe de la plus vite descente, solution d'un problème proposé bien antérieurement par Galilée.

Nous admettrons que la force qui sollicite le point mobile, dont la masse est censée égale à l'unité, dérive d'un potentiel.

THÉORÈME I. — *Si une courbe est brachistochrone entre deux points* A *et* B, *elle l'est aussi entre deux points intermédiaires quelconques* m', n.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et soit mnm' la brachistochrone entre m et m'. La vitesse en m' sera la même, que le mobile parcoure mm' ou mnm'. Mais le temps employé serait plus court dans le trajet $\mathrm{A}mnm'\mathrm{B}$ que dans celui de $\mathrm{A}mm'\mathrm{B}$, qui ne serait plus ainsi la brachistochrone, ce qui est contraire à ce qui a été admis.

---

(1) Cet article était composé, lorsqu'un vague souvenir m'a conduit à rechercher si, dans ce Recueil, je n'avais pas imprimé déjà une Note sur le même sujet. J'ai retrouvé, en effet, dans le volume de 1877 un travail analogue, et j'ai été sur le point de supprimer une bonne partie de cet article. Toutefois, comme la rédaction nouvelle est bien plus complète, et diffère de la précédente en quelques points essentiels, j'ai pensé que ce travail pourrait être utile aux nombreux élèves qui lisent ce Recueil, et j'ai maintenu la nouvelle rédaction telle qu'elle avait été soumise à mon vénérable maître, M. Gerono.

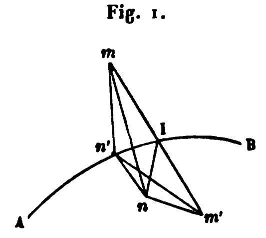
Corollaire. — La courbe est brachistochrone dans le parcours de deux éléments consécutifs.

THÉORÈME II. — *Lorsque le mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface fixe, le plan osculateur en un point de la brachistochrone est normal à la surface de niveau passant par ce point.*

Supposons en effet (*fig.* 1) que cela n'ait pas lieu, et soient

m, m' deux points infiniment voisins de la courbe;

Fig. 1.



AB la section faite par le plan, passant par mm', mené normalement à la surface de niveau qui coupe cette droite en un point intermédiaire I;
n' l'intersection de la courbe avec le plan tangent en I;
n la projection de ce point sur la tangente en I à AB;
V, V' les vitesses avec lesquelles le mobile parcourt mn ou mn, et $n'm'$ ou nm'.

La durée du parcours de $mn'm'$ est

$$\frac{mn'}{V} + \frac{n'm'}{V'},$$

et celle de mnm',

$$\frac{mn}{V} + \frac{n'm'}{V'}.$$

Or $mn' > mn$, $nm' > nm$; la première durée serait donc supérieure à la seconde, ce qui est absurde.

Corollaire. — Dans le cas de la pesanteur, et dans celui où la force est dirigée vers un centre fixe et est une fonction de la distance à ce point, la brachistochrone est plane. En effet, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux ou des sphères.

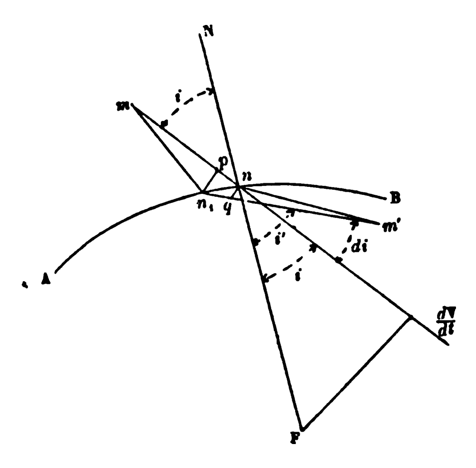
Théorème III (dû à Euler). — *La composante normale de la force extérieure est égale à la force centrifuge.*

Soient (*fig.* 2)

mn, nm' deux éléments consécutifs de la courbe;

AB la section normale faite dans la surface de niveau passant par n, par le plan osculateur mnm';

Fig. 2.



nN la normale à AB suivant le prolongement de laquelle est dirigée la force extérieure F;

n_1 un point de AB infiniment voisin de n;

p, q les projections de n_1, n sur mn, n_1m';

i, i' les angles mnN, $m'n$F;

V, V' les vitesses avec lesquelles le mobile parcourrait mn ou mn_1, nm' ou n_1m'.

Pour que la durée du parcours de mnm' soit minimum, il faut qu'en la retranchant de celle de mn_1m' on obtienne un résultat nul.

On doit donc avoir

$$\frac{mn_1}{V} + \frac{n_1m'}{V'} - \frac{mn}{V} - \frac{nm'}{V'} = 0,$$

ou

$$\frac{mn_1 - mn}{V} - \frac{nm' - n_1m'}{V'} = 0,$$

ou encore

$$\frac{np}{V} = \frac{n_1q}{V'}.$$

Or

$$np = nn_1 \sin i, \quad n_1q = nn_1 \sin i';$$

par suite,

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin i'}{V'},$$

ce qui exprime que $d\,\frac{\sin i}{V} = 0$. On déduit de là

$$V \cos i\, di - dV \sin i = 0,$$

d'où

$$di = \frac{dV}{V} \operatorname{tang} i,$$

et, en divisant par $ds = V\,dt$,

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} \operatorname{tang} i = V^2 \frac{di}{ds}.$$

Mais $\frac{di}{ds}$ est la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe; il vient donc

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{dV}{dt} \operatorname{tang} i,$$

ce qui démontre bien le théorème énoncé, puisque $\frac{dV}{dt} \operatorname{tang} i$ n'est autre chose que la composante normale de F.

Théorème IV. — *La tangente à la courbe au point de départ A_0 est normale à la surface de niveau passant par ce point.*

Soient

AB la section faite par le plan osculateur en A_0 dans une surface de niveau infiniment voisine de ce point;
A_0B la normale à cette section suivant laquelle agit la force F;
A l'intersection de la brachistochrone avec AB;
φ l'angle AA_0B;
θ la durée du trajet A_0A.

On a

$$A_0A = \frac{F}{2}\cos\varphi\,\theta^2, \quad A_0A = \frac{A_0B}{\cos\varphi},$$

d'où

$$\theta^2 = \frac{2A_0B}{F\cos^2\varphi}.$$

Le minimum de θ par rapport à φ correspondant à $\varphi = 0$, il faut que A coïncide avec B, ce qu'il fallait établir.

Équations générales, en coordonnées rectangulaires, des brachistochrones lorsque le mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface.

Soient

α, β, γ les angles formés avec Ox, Oy, Oz par la tangente au point (x, y, z) de la courbe;
λ, μ, ν les angles semblables relatifs à la normale principale;
λ', μ', ν' ceux qui se rapportent à la binormale;
ε l'angle de contingence;
ds l'élément d'arc;
ρ le rayon de courbure;
$\varphi(x, y, z)$ le potentiel.

On sait que

$$(a) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{d\cos\alpha}{\varepsilon}, \\ \cos\mu &= \frac{d\cos\beta}{\varepsilon}, \\ \cos\nu &= \frac{d\cos\gamma}{\varepsilon}, \\ \varepsilon &= \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\lambda' &= \frac{\cos\gamma\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\gamma}{\varepsilon}, \\ \cos\mu' &= \frac{\cos\alpha\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\alpha}{\varepsilon}, \\ \cos\nu' &= \frac{\cos\beta\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\beta}{\varepsilon}. \end{aligned} \right.$$

Si nous posons

$$\Delta = \sqrt{\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}},$$

les cosinus des angles formés avec Ox, Oy, Oz par la normale à la surface de niveau passant par le point (x, y, z) étant

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{1}{\Delta}\frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{1}{\Delta}\frac{d\varphi}{dz},$$

il vient, en exprimant que cette droite est perpendiculaire à la binormale à la courbe,

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dx}\cos\lambda' + \frac{d\varphi}{dy}\cos\mu' + \frac{d\varphi}{dz}\cos\nu' = 0.$$

La composante F_n de la force extérieure F (qui est normale à la surface de niveau) suivant le rayon de courbure

a pour expression

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} F_n &= \frac{d\varphi}{dx}\cos\lambda + \frac{d\varphi}{dy}\cos\mu + \frac{d\varphi}{dz}\cos\nu \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d\varphi}{dx}\,d\cos\alpha + \frac{d\varphi}{dy}\,d\cos\beta + \frac{d\varphi}{dz}\,d\cos\gamma\right). \end{aligned}\right.$$

Mais, en désignant par A une constante, le principe des forces vives donne

$$V^2 = 2(\varphi + A),$$

d'où, d'après le théorème d'Euler,

$$(e)\qquad F_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2\varepsilon}{ds} = 2(\varphi + A)\frac{\varepsilon}{ds}.$$

En identifiant les expressions (d) et (e), et remplaçant ε par sa valeur (c), on trouve

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dx}\,d\cos\alpha + \frac{d\varphi}{dy}\,d\cos\beta + \frac{d\varphi}{dz}\,d\cos\gamma \\ &\quad = 2(\varphi + A)\,\frac{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et les valeurs, qui s'en déduisent, de $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ par leurs expressions en fonction de x, y, z et de leurs dérivées, les équations (2) et (3) seront les équations de la courbe.

De la courbe de la plus vite descente.

Nous savons déjà que, lorsque le mobile est uniquement soumis à l'action de la pesanteur, la courbe décrite est comprise dans un plan vertical.

Soient

O le point de départ ;
Ox, Oy son horizontale et sa verticale ;
α l'inclinaison de la tangente à la courbe sur Ox.

On a

$$V^2 = 2gy,$$

et, comme α diminue quand y augmente, on est conduit à poser

$$\frac{V^2}{\rho} = - V^2 \frac{d\alpha}{ds} = - 2gy \frac{d\alpha}{ds}.$$

Mais, d'après le théorème d'Euler, cette expression est égale à $g \cos\alpha$, d'où

$$- 2y \frac{d\alpha}{ds} = \cos\alpha.$$

Or $ds = \frac{dr}{\sin\alpha}$; par suite,

$$\frac{1}{2} \frac{dr}{y} = - \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\cos\alpha}$$

et

$$\cos\alpha = C\sqrt{y},$$

en désignant par C une constante.

On reconnaît ainsi que la courbe est une cycloïde à base horizontale, dont O est un point de rebroussement.

Brachistochrone dans le cas où le mobile est soumis à l'action d'une force dirigée positivement ou négativement vers un centre fixe O, et qu'elle est fonction de la distance r à ce centre.

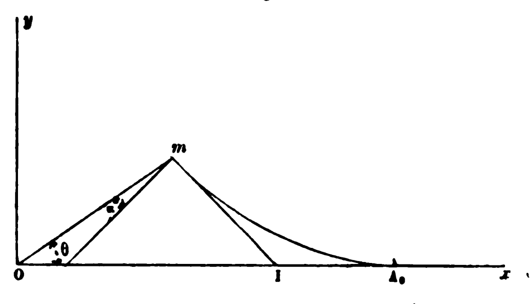
Pour fixer les idées, nous supposerons que la force est attractive et nous représenterons par $f(r)$ son potentiel. Nous rappellerons que la courbe est plane. Nous distinguerons par l'indice o les quantités qui se rapportent au point de départ A_0. Nous prendrons pour axe des abscisses la direction de OA_0 (*fig.* 3) à laquelle la courbe est tangente en A_0.

Soient

m un point quelconque de la courbe ;

I l'intersection de la tangente en ce point avec Ox;
α l'angle formé par la normale en m avec le rayon vecteur;

Fig. 3.



θ l'angle polaire mOx.

On a, pour le carré de la vitesse,

(4) $$V^2 = 2[f(r_0) - f(r)].$$

Si l'on remarque que

$$\widehat{m\mathrm{I}x} = \alpha + 90^\circ + \theta,$$

l'angle de contingence a pour expression

$$\varepsilon = -d\widehat{m\mathrm{I}x} = -(d\alpha + d\theta),$$

et, comme

$$ds = -\frac{dr}{\sin\alpha}$$

il vient pour la courbure

(5) $$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{d\alpha + d\theta}{dr}\right)\sin\alpha.$$

La composante normale de la force étant $f'(r)\cos\alpha$, nous avons, en vertu du théorème d'Euler, en ayant égard aux formules (1) et (2),

(6) $$2[f(r_0) - f(r)]\left(\frac{d\alpha}{dr} + \frac{d\theta}{dr}\right) = f'(r)\cos\alpha.$$

Nous remarquerons maintenant que

$$(7)\qquad \cot z = -r\frac{d\theta}{dr},$$

et, en remplaçant dans l'équation (6) la valeur de $\frac{d\theta}{dr}$ déduite de cette formule, on trouve

$$(8)\qquad [2f(r_1) - f(r)]\left(\sin z\frac{dz}{dr} - \frac{\cos z}{r}\right) = f(r)\cos z.$$

Si nous posons

$$(9)\qquad \varphi'(r) = \frac{f(r)}{2[f(r_1) - f(r)]} - \frac{1}{r},$$

l'équation précédente devient

$$\frac{d\cos z}{dr} + \varphi'(r)\cos z = 0,$$

d'où, en désignant par M une constante,

$$(10)\qquad \cos z = \mathrm{M}e^{-\varphi(r)}.$$

On déduit de là

$$\cot z = \frac{\mathrm{M}e^{-\varphi(r)}}{\sqrt{1 - \mathrm{M}^2 e^{-2\varphi(r)}}} = -r\frac{d\theta}{dr},$$

d'où, en remarquant que $\theta = 0$ pour $r = r_0$,

$$(11)\qquad \theta = \mathrm{M}\int_r^{r_0} \frac{e^{-\varphi(r)}dr}{r\sqrt{1 + \mathrm{M}^2 e^{-2\varphi(r)}}}.$$

La constante M se déterminera par la condition que pour le point d'arrivée on ait

$$r = r_1,\quad \theta = \theta_1.$$

Supposons, par exemple, que la force soit proportionnelle à la distance du mobile au centre d'attraction ou que

$$f(r) = \mu r^2,$$

μ désignant un coefficient donné. Il est facile de voir que, dans ce cas particulier, on a

$$\varphi'(r) = \frac{r}{r_0^2 - r^2} + \frac{1}{r} = \frac{r_0^2}{(r_0^2 - r^2)r}$$
$$= r_0^2\left[\frac{1}{2(r_0 - r)} - \frac{1}{2(r_0 + r)} + \frac{1}{r}\right],$$

d'où

$$\varphi(r) = r_0^2 \log \frac{r}{\sqrt{r_0^2 - r^2}},$$

et successivement

$$\cos\alpha = \frac{M\sqrt{r_0^2 - r^2}}{r},$$

$$r^2 \sin^2\alpha = (1 + M^2)\left(r^2 - r_0^2 \frac{M^2}{1 + M^2}\right),$$

d'où l'on conclut que la courbe est une hypocycloïde, vérification d'un théorème bien connu.

Extension du théorème d'Euler au cas où le mobile est assujetti à rester sur une surface.

Cette extension est due à M. Roger, qui, en se basant sur le Calcul des variations, l'a démontrée dans une Thèse insérée au Tome XIII (1re série) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Ce n'est que dans ces derniers temps que je suis parvenu à donner une démonstration du théorème de Roger, qui a, sous certain rapport, une grande importance, puisque, avec l'équation de la surface fixe, il permet de définir la brachistochrone.

Soient (*fig.* 4)

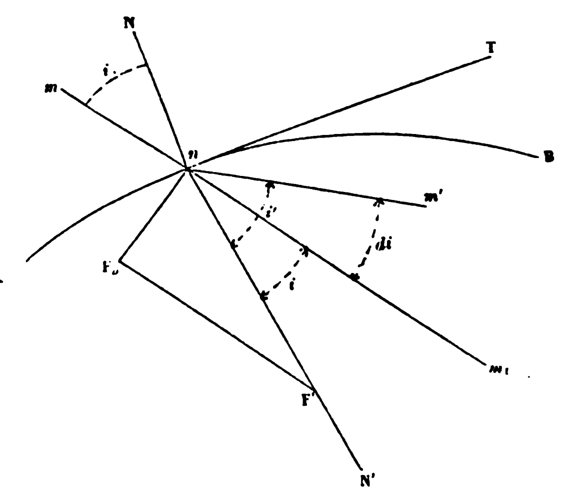
mn, *nm'* deux éléments consécutifs de la courbe;

AB l'intersection de la surface fixe avec la surface de niveau passant par *n*;

*n*T la tangente à cette courbe;

nN, nN' les perpendiculaires en n à cette droite dans les plans tangents mnT, $m'nT$;

Fig. 4.



i, i' les angles mnN et $m'nN'$;

nm_1 la droite menée dans le plan Tnm' qui fait avec nN' l'angle i.

Concevons que l'on rabatte le plan TnN' dans le plan TnN; nm_1 viendra se placer dans le prolongement de mn; mais alors on rentrera dans le cas ordinaire traité plus haut, et la condition pour que la durée du parcours mnm' soit minimum sera

$$(a) \qquad \frac{dV}{dt} \operatorname{tang} i = V^2 \frac{di}{ds}.$$

Revenant à la réalité, on voit que mn, nm' sont les directions de deux éléments consécutifs d'une géodésique tracée sur la surface développable $mnTm$, et par suite sur la surface fixe; di, $\frac{di}{ds}$ sont, par suite, l'angle de contingence géodésique et la courbure géodésique.

Soient

F' la force extérieure F estimée dans le plan tangent, dirigée suivant nN';

F'_b la composante (dite géodésique) de F', normale à la vitesse;

φ l'angle formé par le rayon de courbure ρ avec la normale à la surface.

On a

$$F_b = \frac{dV}{dt}\tang i,$$

$$\frac{di}{ds} = \frac{\sin\varphi}{\rho},$$

et l'équation (a) devient

$$F_b = \frac{V^2\sin\varphi}{\rho}.$$

Mais, si F_n est la composante de la force F dirigée suivant le rayon de courbure, on a

$$F_b = F_n\sin\varphi;$$

par suite,

$$F_n = \frac{V^2}{\rho},$$

ce qu'il fallait établir.

On démontrera sans peine qu'au point de départ la courbe est normale à l'intersection de la surface de niveau en ce point et de la surface fixe.

SUR UN THÉORÈME DE M. CHASLES CONCERNANT LES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Parmi les nombreux et intéressants théorèmes donnés par M. Chasles sur les coniques homofocales (*Comptes*

rendus des séances de l'Académie des Sciences, année 1844) et dont la connaissance permet de faciliter l'étude de la théorie des transcendantes elliptiques, nous rappellerons le suivant :

Si, par deux points fixes d'une conique, on fait passer un cercle variable, le lieu du point de concours des tangentes communes est une conique homofocale à la proposée; de plus, le lieu reste le même lorsque la droite qui joint les deux points fixes se déplace parallèlement à elle-même.

Considérons une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

et un point P de paramètre angulaire φ; un point quelconque Q de la normale en P à l'ellipse a pour coordonnées

$$x=(a+\lambda b)\cos\varphi,\quad y=(b+\lambda a)\sin\varphi;$$

si l'on suppose $PQ=r$, on trouve

$$r^2=(x-a\cos\varphi)^2+(y-b\sin\varphi)^2,$$

ou bien, en désignant par b' la longueur du demi-diamètre conjugué de celui qui passe en P,

$$r=\lambda b';$$

on prendra d'ailleurs λ avec le signe $+$ ou avec le signe $-$ suivant que le point Q se trouvera sur la partie extérieure ou intérieure de la normale en P.

Si l'on suppose que le point P se déplace sur l'ellipse, λ restant constant, le point Q décrit une ellipse concentrique, d'axes $a+\lambda b$ et $b+\lambda a$; on retrouve ainsi un théorème de M. Transon. Dans le cas particulier où $\lambda=\pm 1$, les ellipses deviennent les cercles concentri-

ques de rayons $a \pm b$; ce résultat revient, au fond, à la construction bien connue de M. Chasles pour trouver les grandeurs des axes d'une ellipse définie par un système de deux diamètres conjugués.

Décrivons, du point Q comme centre, un cercle de rayon $r = \lambda b'$, tangent à l'ellipse au point P; on trouve aisément, pour les coordonnées du point R de concours des tangentes communes à l'ellipse et au cercle,

$$(1)\qquad \begin{cases} (1-\lambda^2)x = (a + 2\lambda b + \lambda^2 a)\cos\varphi, \\ (1-\lambda^2)y = (b + 2\lambda a + \lambda^2 b)\sin\varphi, \end{cases}$$

ou bien

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\cos\varphi} + \dfrac{y}{\sin\varphi} = (a+b)\dfrac{b'+r}{b'-r}, \\ \dfrac{x}{\cos\varphi} - \dfrac{y}{\sin\varphi} = (a-b)\dfrac{b'-r}{b'+r}. \end{cases}$$

En multipliant membre à membre les équations (2), on obtient le lieu du point R lorsque l'on fait varier r; on trouve ainsi

$$(3)\qquad \frac{x^2}{\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{\sin^2\varphi} = a^2 - b^2 = c^2.$$

C'est l'équation d'une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée, passant par le point P et par les points symétriques de celui-ci par rapport aux axes et au centre de l'ellipse donnée. On vérifie d'ailleurs les formules (1) *a posteriori*, en observant que la tangente à l'hyperbole en R passe par le point Q. Ces formules permettent de résoudre le problème suivant :

Problème. — *Par un point* R *extérieur à l'ellipse on mène les tangentes : calculer les rayons des cercles tangents à l'ellipse et aux deux tangentes issues du point* R.

Désignons par x, y les coordonnées du point R, par ρ sa distance à l'origine, par u et v ses distances aux deux foyers de l'ellipse, et par V l'angle des deux tangentes à l'ellipse menées par le point R. On a les formules

$$\cos V = \frac{4a^2 - u^2 - v^2}{2uv} \quad \text{et} \quad \cos V = \frac{a^2 + b^2 - \rho^2}{uv}.$$

Cela posé, on détermine les axes de l'hyperbole homofocale à l'ellipse proposée et passant par le point R au moyen de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} = 1,$$

d'où l'on tire, pour μ négatif,

$$2\mu = \rho^2 - a^2 - b^2 - uv$$

ou bien

$$\mu = - uv \cos^2 \frac{V}{2}.$$

Pour déterminer le paramètre angulaire φ des points d'intersection de l'hyperbole et de l'ellipse, on a

$$c^2 \cos^2 \varphi = a^2 + \mu, \quad - c^2 \sin^2 \varphi = b^2 + \mu,$$

et, en ajoutant,

$$c^2 \cos 2\varphi = \rho^2 - uv.$$

On en déduit facilement l'angle φ, que nous supposerons compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et les angles $-\varphi$, $\pi \pm \varphi$.

Enfin, on obtient le rayon du cercle correspondant à chacun des quatre points d'intersection en tirant de la formule (2)

$$\frac{r}{b} = \frac{(y - b \sin \varphi) \cos \varphi}{(x - a \cos \varphi) \sin \varphi}.$$

Si l'on désigne par r_1 et r_2 les rayons qui correspon-

dent aux deux points ayant pour paramètres angulaires φ et $\varphi + \pi$, on déduit de la formule précédente

$$r_1 r_2 = b'^2,$$

et par suite le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Aux deux extrémités d'un diamètre fixe d'une ellipse, on prend, sur les normales extérieures ou intérieures, deux longueurs dont le produit égale le carré du demi-diamètre conjugué : l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités est une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée, passant par les deux extrémités du diamètre donné.*

SUR TROIS CONIQUES CONFOCALES DEUX A DEUX;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Si trois coniques sont deux à deux bitangentes à un même cercle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point.

C'est la généralisation d'un curieux théorème énoncé, pour le cas de trois coniques confocales deux à deux, par M. Émile Lemoine (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 143; t. XIII, p. 487). Désignons par x, y, z les puissances d'un point quelconque du plan par rapport aux trois cercles; les équations des trois coniques bitangentes à deux des trois cercles sont

$$\sqrt{y} + \sqrt{z} = 2a, \quad \sqrt{z} + \sqrt{x} = 2b, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2c,$$

a, b, c ayant des signes quelconques. Les deux dernières équations s'écrivent

$$(x - z + 4b^2)^2 = 16b^2x \quad \text{et} \quad (x - y + 4c^2)^2 = 16c^2x;$$

divisons membre à membre et extrayons la racine carrée : nous obtenons, pour l'une des cordes d'intersection des deux coniques, l'équation

$$c(x - z + 4b^2) = b(x - y + 4c^2).$$

Par permutation circulaire, on obtient les équations des autres sécantes communes. Celles-ci sont vérifiées par les coordonnées du point qui se trouve à l'intersection de trois parallèles aux axes radicaux des trois cercles pris deux à deux, déterminées par

$$\begin{aligned} x - y &= 4c(b - a), \\ y - z &= 4a(c - b), \\ z - x &= 4b(a - c). \end{aligned}$$

La symétrie de ces formules démontre le théorème en question.

En éliminant le terme tout connu entre deux des équations des cordes, on obtient

$$ax(b - c) + by(c - a) + cz(a - b) = 0;$$

c'est l'équation de la droite qui joint le centre radical des trois cercles au point de concours des sécantes communes. Si l'on change le signe de a, de b ou de c, on obtient les trois autres points de concours.

Remarque. — En général, toute transformation analytique donne lieu à des théorèmes différents lorsque l'on remplace les éléments choisis pour système de coordonnées par d'autres. Ainsi, dans le cas présent, si x, y, z désignent les distances d'un point aux trois côtés d'un triangle, les transformations analytiques précédentes démontrent ce théorème :

Si trois paraboles sont tangentes à deux des trois côtés d'un triangle et ont respectivement pour axes trois droites concourantes partant des sommets du triangle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point.

SOLUTION DES EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE PROPOSÉS PAR M. GENTY

(voir 2e série, t. XVII, p. 223);

PAR M. CHÉFIK-BEY (DU CAIRE).

---

1. *Si dans un tétraèdre les arêtes opposées sont égales, on peut dire que ce tétraèdre est isoscèle. Les quatre faces d'un pareil tétraèdre sont égales.*

En effet, soit SABC le tétraèdre. Je dis que, par exemple, la face SAB est égale à la face ABC. En effet, AB est commun, AC = SB et BC = SA d'après l'hypothèse.

2. *Soient a, b, c les côtés de l'un de ces triangles,* A, B, C *les angles. Soient de plus α, β, γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a, b, c aux milieux des côtés opposés du tétraèdre. On a*

$$\alpha^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = c^2,$$

$$\beta^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = b^2,$$

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \quad \beta^2 + \gamma^2 = a^2.$$

Désignons par M et N les milieux de SB et de AC;

MN est une médiane du triangle AMC, et l'on a

$$\overline{MN}^2 = \beta^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - \frac{1}{2}b^2\right).$$

Or

$$\overline{AM}^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2\right),$$

$$\overline{MC}^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2\right),$$

donc

$$\beta^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

On trouverait de même α^2 et γ^2.

Ajoutant deux à deux α^2, β^2 et γ^2, on trouve

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad b^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad c^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

C. Q. F. D.

3. *Les médianes sont en même temps les plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre, et forment un trièdre trirectangle.*

Des valeurs de AM et MC il résulte que le triangle AMC est isoscèle; MN est donc perpendiculaire sur AC. On verrait de même que MN est perpendiculaire sur SB; donc MN est la plus courte distance de AC et de SB.

Soient P et Q les milieux de SC et AB. On voit que

$$MP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AS = MQ = PN = QN,$$

et MP est parallèle à QN. Par conséquent, MPNQ est un losange, et MN, PQ se coupent à angle droit.

On démontrerait de la même manière, en désignant par V, R les milieux de SA, BC, que VR et PQ sont perpendiculaires, ainsi que MN et VR. Donc les médianes forment un trièdre trirectangle.

4. *Les angles dièdres opposés du tétraèdre sont égaux deux à deux, et, si φ, ψ, θ sont les angles dièdres qui ont pour arêtes les côtés a, b, c, on a*

$$\frac{\sin\varphi}{a}=\frac{\sin\psi}{b}=\frac{\sin\theta}{c},$$

et par suite

$$\frac{\sin\varphi}{\sin A}=\frac{\sin\psi}{\sin B}=\frac{\sin\theta}{\sin C}.$$

Je mène par AC, SB les plans AKC et SLB, perpendiculaires à SB et AC. Les triangles ACK, SLB sont égaux; cela résulte de l'égalité des triangles SCB, SAC et des côtés SB et AC. Les angles K et L qui mesurent les dièdres SB et AC sont donc égaux.

Par le sommet S, je mène des plans perpendiculaires aux arêtes opposées. Soient G le point où leur intersection perce la base ABC et D, E, F les points où ils coupent les arêtes BC, AB, AC.

On a

$$SG = SD\sin SDG \quad \text{et} \quad SG = SE\sin SEG.$$

Mais

$$SD = SB\sin SBC, \quad SE = SB\sin SBA;$$

donc

$$\sin SBC \sin SDG = \sin SEG \sin SBA$$

ou

$$\sin C\sin\varphi = \sin A\sin\theta,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin A}=\frac{\sin\theta}{\sin C}=\frac{\sin\psi}{\sin B}.$$

Or

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c};$$

donc

$$\frac{\sin\varphi}{a}=\frac{\sin\theta}{c}=\frac{\sin\psi}{b}.$$

C. Q. F. D.

5. *Si* V *est le volume du tétraèdre, on a*

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3};$$

on a aussi

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

Je construis sur les arêtes SA, SB, SC un parallélépipède; son volume sera donné par la formule connue

$$V = 2abc\sqrt{\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{A+B-C}{2}\sin\frac{A+C-B}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}}.$$

Si l'on remarque que le tétraèdre est le sixième de ce solide et que $A + B + C = 180°$, on trouve, tout calcul fait,

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

C. Q. F. D.

Si nous remplaçons dans cette expression cos A, cos B, cos C par $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ et $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, il vient, en tenant compte des formules du n° 2,

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}.$$

C. Q. F. D.

6. *Si* S *est l'aire d'une des faces du tétraèdre, on a*

$$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{2},$$

et on a donc

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{4}.$$

On sait que

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)},$$

qui devient, en élevant au carré,

$$16S^2 = [(a+c)^2 - b^2][2ac - (a^2+c^2-b^2)],$$

et, effectuant les calculs dans le premier crochet, on trouve

$$16S^2 = 4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2$$

ou bien

$$4S^2 = (\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2) - \beta^4,$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma}}{2}.$$

C. Q. F. D.

Égalant la première valeur de S et celle-ci, on obtient

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4}.$$

C. Q. F. D.

7. *Le point d'intersection des médianes, qui est le centre de gravité du tétraèdre, est en même temps le centre des sphères inscrite et circonscrite.*

Soit H le centre de gravité du triangle ABC. Joignons SH. Je dis que cette droite rencontre MN au point O et que $OH = \frac{1}{4}$ SH, ce qui veut dire que O est le centre de gravité de SABC.

En effet, menons de M une parallèle à SH; soit I son point de rencontre avec NHB. Nous aurons BI = IH et par conséquent = NH.

Donc

$$MO = NO. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On a de même

$$MI = \frac{1}{2} SH \quad \text{et} \quad OH = \frac{1}{2} MI,$$

par conséquent,

$$OH = \frac{1}{4} AH.$$

Le point O est donc bien le centre de gravité de la pyramide. C. Q. F. D.

On a vu que

$$MA = MC \quad \text{et} \quad NA = NC;$$

il en résulte

$$OA = OC.$$

De même,

$$OS = OB.$$

Donc O est le centre de la sphère circonscrite.

C. Q. F. D.

Soient K et T les projections de O sur les faces ABC, SBC; elles sont les centres des cercles circonscrits à ces deux faces; par suite, KQ, TP sont perpendiculaires sur AB et SC, et l'on a

$$KQ = TP.$$

Mais

$$OQ = OP;$$

les triangles rectangles OKQ, OTP sont donc égaux; dès lors

$$OK = OT.$$

Le point O est donc également distant des quatre faces du tétraèdre. C. Q. F. D.

On a, pour le rayon de la sphère circonscrite,

$$r^2 = \overline{OC}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{CN}^2.$$

Mais

$$ON = \frac{1}{2}\beta \quad \text{et} \quad CN = \frac{1}{2} b,$$

donc

$$r^2 = \frac{\beta^2 + b^2}{4},$$

ou, en remplaçant b^2 par $\alpha^2 + \gamma^2$,

$$r^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}.$$

Remplaçant b^2 par $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$, il vient

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

De même, pour le rayon de la sphère inscrite,

$$R^2 = \overline{OK}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{KC}^2;$$

KC étant le rayon du cercle circonscrit à ABC, on a

$$KC = \frac{abc}{4S},$$

et par suite

$$R^2 = r^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{16 S^2},$$

ou bien

$$R^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 \gamma^2)}{4(\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2)},$$

et, réduisant,

$$R^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{4(\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2)}.$$

On tire des formules du n° 5

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C,$$

et, en vertu de cette égalité et de la deuxième du n° 6, la dernière formule devient

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C}{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}.$$

8. ***Tous les angles plans d'un tétraèdre isoscèle sont nécessairement aigus.***

Cela résulte de la formule

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

9. ***Si l'on désigne par* P *la puissance d'un sommet du tétraèdre par rapport à la sphère inscrite, on a***

$$P = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$
$$= \frac{(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}{4(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)}.$$

Je considère le sommet S; sa puissance par rapport à la sphère inscrite est

$$P = \overline{SO}^2 - R^2$$

ou

$$P = r^2 - R^2,$$

qui devient, en vertu des valeurs précédentes,

$$P = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2)}{4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)}.$$

C. Q. F. D.

En transformant cette expression au moyen des formules des nos 2 et 6, on trouve

$$P = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}.$$

C. Q. F. D.

Remarques. — I. La première formule du no 4 est un cas particulier du théorème suivant :

Dans tout tétraèdre, le rapport des produits des arêtes opposées est égal à celui des produits des sinus des dièdres correspondants.

II. En divisant membre à membre les égalités

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3},$$

$$S = \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}}{2},$$

et en désignant par h la hauteur du tétraèdre, on trouve

$$h = 4R.$$

Il en résulte que la droite SOH est la hauteur du tétraèdre.

Note. — Solutions analogues de MM. J. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger; P. Barbarin, professeur au lycée de Nice; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin, et J. Chambon, à Vierzon.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. H. FAURE

(voir 2e série, t. XIV, p. 479);

PAR M. MORET-BLANC.

I. *Une surface de second degré étant coupée par un plan* P, *désignons par* D *le diamètre parallèle à la tangente en un point quelconque de la section, par* p *la distance du centre de la surface au plan tangent en ce point et par* α *l'angle que forme ce plan tangent avec le plan* P.

1° *Pour tout point de la section,*

$$\frac{pD}{\sin\alpha} = \text{const.}$$

2° *La constante conserve la même valeur lorsque le*

plan P roule sur une surface homofocale à la surface donnée.

1° Soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

l'équation de la surface et

$$(2) \qquad ax + by + cz = d$$

celle du plan sécant, d étant la distance du centre de la surface à ce plan, et a, b, c les cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes.

Les coordonnées des extrémités du diamètre parallèle à la tangente au point (x, y, z) de la section sont données par les équations

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1,$$

$$aX + bY + cZ = 0,$$

$$X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu = 0,$$

λ, μ, ν étant les angles que fait avec les axes la normale à la section au point considéré.

On en tire

$$X^2 = \frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}},$$

$$Y^2 = \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}},$$

$$Z^2 = \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}},$$

et par suite

$$= X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$= \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2 + (c\cos\lambda - a\cos\nu)^2 + (b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}}.$$

Or,

$$\cos\lambda = p\frac{x}{A}, \quad \cos\mu = p\frac{y}{B}, \quad \cos\nu = p\frac{z}{C},$$

en remplaçant $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par leurs valeurs, et multipliant haut et bas dans le second membre par $A^2 B^2 C^2$, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{p^2 D^2}{4\sin^2\alpha} \\ &= \frac{A^2B^2C^2}{A(Bbx - Ccy)^2 + B(Ccx - Aaz)^2 + C(Aay - Bbx)^2}. \end{aligned}\right.$$

On tire de l'équation (2)

$$x = \frac{d - by - cz}{a},$$

et, en reportant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$\begin{aligned} &C(Aa^2 + Bb^2)y^2 - 2BCb(d - cz)y \\ &\quad + B(Aa^2 + Cc^2)z^2 - 2BCcdz + BC(d^2 - Ca^2) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$y = \frac{BCab(d - cz) \pm aR}{Ca(Aa^2 + Bb^2)},$$

$$x = \frac{ACa^2(d - cz) \mp bR}{Ca(Aa^2 + Bb^2)}.$$

En portant ces valeurs de x et y dans la relation (3),

ou

$$\frac{pD}{\sin\alpha} = 2\sqrt{\frac{ABC}{A-A'}}.$$

Donc la constante ne change pas quand le plan P roule sur une surface homofocale à la surface donnée.

II. *On donne trois surfaces du second degré homofocales. Une droite* ε *touchant les deux premières coupe la troisième* A *au point* a. *Si le plan tangent au point* a *rencontre au point* m *la parallèle* Om *menée à* ε *par le centre* O *de* A, Om *a une longueur constante quelle que soit la droite* ε.

Soient

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

$$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = 1,$$

$$\frac{x^2}{A''} + \frac{y^2}{B''} + \frac{z^2}{C''} = 1$$

les équations des trois surfaces, avec les relations

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{array}{l} A' - A = B' - B = C' - C = k \\ A'' - A' = B'' - B' = C'' - C' = k', \end{array} \right.$$

exprimant qu'elles sont homofocales.

Soient

$$x = mz + p,$$

$$y = nz + q$$

les équations de la droite ε. Les conditions pour qu'elle touche les deux premières surfaces sont exprimées par

$$A q^2 + B p^2 + C (mq - np)^2 = BCm^2 + ACn^2 + AB,$$

$$A'q^2 + B'p^2 + C'(mq - np)^2 = B'C'm^2 + A'C'n^2 + A'B'.$$

Les coordonnées de ses intersections avec la troisième

sont

$$x_1 = \frac{A''(C''n^2p - C''mnq - B''p \pm mR)}{B''C''m^2 - A''C''n^2 - A''B''},$$

$$y_1 = \frac{B''(C''m^2q - C''mnp - A''q \pm nR)}{B''C''m^2 - A''C''n^2 - A''B''},$$

$$z_1 = \frac{-C''(B''mp - A''nq \pm R)}{B''C''m^2 - A''C''n^2 - A''B''},$$

en posant pour abréger,

$$R = \sqrt{A''B''C''(B''C''m^2 - A''C''n^2 - A''B'' - A''q^2 - B''p^2 - C''(mq-np)^2)}.$$

L'équation du plan tangent à la troisième surface au point (x_1, y_1, z_1) est

$$\frac{x_1}{A''}X + \frac{y_1}{B''}Y + \frac{z_1}{C''}Z = 1,$$

et celles de la parallèle à ε menée par le centre sont

$$X = mZ,$$
$$Y = nZ.$$

On en déduit les coordonnées du point m d'intersection

$$X_1 = \frac{m}{\frac{mx_1}{A''} + \frac{ny_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

$$Y_1 = \frac{n}{\frac{mx_1}{A''} + \frac{ny_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{mx_1}{A''} + \frac{ny_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

d'où

$$\overline{Om}^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$$
$$= \frac{m^2 + n^2 + 1}{\left(\frac{mx_1}{A''} + \frac{ny_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}\right)^2}$$
$$= \frac{A''^2B''^2C''^2(m^2 + n^2 + 1)}{(B''C''mx_1 + A''C''ny_1 + A''B''z_1)^2}.$$

et, en remplaçant x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs,

$$\overline{\mathrm{O}m}^2 = \frac{\mathrm{A''B''C''}(m^2+n^2+1)}{\mathrm{B''C''}m^2+\mathrm{A''C''}n^2+\mathrm{A''B''}-\mathrm{A''}q^2-\mathrm{B''}p^2-\mathrm{C''}(mq-np)^2}.$$

Posons

$$\mathrm{B''C''}m^2+\mathrm{A''C''}n^2+\mathrm{A''B''}-\mathrm{A''}q^2-\mathrm{B''}p^2-\mathrm{C''}(mq-np)^2=\mathrm{S};$$

si l'on résout les trois équations

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\,q^2+\mathrm{B}\,p^2+\mathrm{C}\,(mq-np)^2 &= \mathrm{B\,C}\,m^2+\mathrm{A\,C}\,n^2+\mathrm{A\,B},\\ \mathrm{A'}\,q^2+\mathrm{B'}\,p^2+\mathrm{C'}\,(mq-np)^2 &= \mathrm{B'\,C'}\,m^2+\mathrm{A'\,C'}\,n^2+\mathrm{A'\,B'},\\ \mathrm{A''}q^2+\mathrm{B''}p^2+\mathrm{C''}(mq-np)^2 &= \mathrm{B''C''}m^2+\mathrm{A''C''}n^2+\mathrm{A''B''}-\mathrm{S}, \end{aligned}$$

par rapport aux variables q^2, p^2 et $(mq-np)^2$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C}\\ \mathrm{A'} & \mathrm{B'} & \mathrm{C'}\\ \mathrm{A''} & \mathrm{B''} & \mathrm{C''} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C}\\ k & k & k\\ k' & k' & k' \end{vmatrix} = kk' \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

donc, puisque p^2, q^2 et $(mq-np)^2$ admettent des valeurs différentes de zéro, il faut que les numérateurs soient nuls, et par suite que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{BC}m^2+\mathrm{AC}n^2+\mathrm{AB}\\ \mathrm{A'} & \mathrm{B'} & \mathrm{B'C'}m^2+\mathrm{A'C'}n^2+\mathrm{A'B'}\\ \mathrm{A''} & \mathrm{B''} & \mathrm{B''C''}m^2+\mathrm{A''C''}n^2+\mathrm{A''B''}-\mathrm{S} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \mathrm{S(AB'-BA')} = {} & (\mathrm{BC}m^2+\mathrm{AC}n^2+\mathrm{AB})(\mathrm{A'B''-B'A''})\\ & -(\mathrm{B'C'}m^2+\mathrm{A'C'}n^2+\mathrm{A'B'})(\mathrm{AB''-BA''})\\ & +(\mathrm{B''C''}m^2+\mathrm{A''C''}n^2+\mathrm{A''B''})(\mathrm{AB'-BA'}) \end{aligned}$$

et, en simplifiant au moyen des relations (α),

$$\mathrm{S}=(k+k')k'(m^2+n+1)=(\mathrm{A''-A})(\mathrm{A''-A'})(m^2+n^2+1).$$

La valeur de $\overline{Om}^2$ devient donc

$$\overline{Om}^2 = \frac{A''B''C''}{(A''-A)(A''-A')}$$

ou

$$Om = \sqrt{\frac{A''B''C''}{(A''-A)(A''-A')}},$$

valeur constante. C. Q. F. D.

III. *Par un point d'une surface du second degré, on mène trois plans rectangulaires* A, B, C. *Si l'on désigne par* α, β, γ *les rayons de courbure des trois sections en ce point, et par* T *le plan tangent en ce même point,*

$$\frac{\sin^3 TA}{\alpha} + \frac{\sin^3 TB}{\beta} + \frac{\sin^3 TC}{\gamma} = \text{const.} \quad (^1).$$

Prenons les trois plans sécants pour plans des coordonnées, et soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z = 0$$

l'équation de la surface.

Celle du plan tangent à l'origine est

$$Cx + C'y + C''z = 0.$$

Les sinus des angles que ce plan fait avec les trois plans A, B, C sont respectivement

$$\frac{\sqrt{C^2+C'^2}}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}, \quad \frac{\sqrt{C^2+C''^2}}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}, \quad \frac{\sqrt{C'^2+C''^2}}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}.$$

En faisant $z=0$ dans l'équation de la surface, on a

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0,$$

équation de la section faite par le plan A.

---

(1) C'est par erreur que dans l'énoncé les exposants des sinus ont été affectés du signe —.

On en déduit, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{C'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2B''CC' - (AC'^2 + A'C^2)}{C'^3},$$

et par suite

$$x = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(C^2 + C'^2)^{\frac{3}{2}}}{C'^3(AC'^2 + A'C^2 - 2B''CC')},$$

$$\frac{\sin^3 AT}{\alpha} = \frac{AC'^2 + A'C^2 - 2B''CC'}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouve de même

$$\frac{\sin^3 BT}{\beta} = \frac{AC''^2 + A''C^2 - 2B'CC''}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\sin^3 CT}{\gamma} = \frac{A'C''^2 + A''C'^2 - 2BC'C''}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par suite,

$$+\frac{\sin^3 BT}{\beta} + \frac{\sin^3 CT}{\gamma}$$

$$= \frac{(A + A' + A'')(C^2 + C'^2 + C''^2) - (AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2BC'C'' + 2B'CC'' + 2B''CC')}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On sait que, dans la transformation orthogonale, $A + A' + A''$ et $C^2 + C'^2 + C''^2$ sont des invariants; il faut vérifier que

$$AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2BC'C'' + 2B'CC'' + 2B''CC'$$

est aussi un invariant.

Les formules de transformation pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires sont

$$x = ax' + a'y' + a''z',$$
$$y = bx' + b'y' + b''z',$$
$$z = cx' + c'y' + c''z',$$

avec les relations connues

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=1, & aa'+bb'+cc'=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^2+a'^2+a''^2=1, & ab+a'b'+a''b''=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En distinguant par l'indice 1 les coefficients de l'équation transformée, on a

$$\begin{aligned}
A_1 &= Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ac + 2B''ab, \\
A'_1 &= Aa'^2 + A'b'^2 + A''c'^2 + 2Bb'c' + 2B'a'c' + 2B''a'b', \\
A''_1 &= Aa''^2 + A'b''^2 + A''c''^2 + 2Bb''c'' + 2B'a''c'' + 2B''a''b'', \\
B_1 &= Aa'a'' + A'b'b'' + A''c'c'' \\
&\quad + B(b'c''+c'b'') + B'(c'a''+a'c'') + B''(a'b''+b'a''), \\
B'_1 &= Aaa'' + A'bb'' + A''cc'' \\
&\quad + B(bc''+cb'') + B'(ca''+ac'') + B''(ab''+ba''), \\
B''_1 &= Aaa' + A'bb' + A''cc' \\
&\quad + B(bc'+cb') + B'(ca'+ac') + B''(ab'+ba'), \\
C_1 &= Ca + C'b + C''c, \\
C'_1 &= Ca' + C'b' + C''c', \\
C''_1 &= Ca'' + C'b'' + C''c'',
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
C_1^2 &= C^2a^2 + C'^2b^2 + C''^2c^2 + 2CC'ab + 2CC''ac + 2C'C''bc, \\
C_1'^2 &= C^2a'^2 + \ldots, \\
C_1''^2 &= C^2a''^2 + \ldots, \\
C_1C'_1 &= C^2aa' + C'^2bb' + C''^2cc' \\
&\quad + CC'(ab'+ba') + CC''(ac'+ca') + C'C''(ab'-ba'), \\
C_1C''_1 &= C^2aa'' + \ldots, \\
C'_1C''_1 &= C^2a'a'' + \ldots.
\end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs, et en ayant égard aux rela-

tions (α), on vérifie que

$$A_1 + A'_1 + A''_1 = A + A' + A'',$$
$$C_1^2 + C_1'^2 + C_1''^2 = C^2 + C'^2 + C''^2,$$
$$A_1C_1^2 + A'_1C_1'^2 + A''_1C_1''^2 + 2B_1C'_1C''_1 + 2B'_1C_1C''_1 + 2B''_1C_1C'_1$$
$$= AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2BC'C'' + 2B'CC'' + 2B''CC'.$$

Cette fonction des coefficients est donc aussi un invariant, ce qui démontre le théorème.

SUR QUELQUES LETTRES INÉDITES DE LAGRANGE PUBLIÉES PAR M. BALTHASAR BONCOMPAGNI;

Notice historique lue à l'Académie royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples, dans sa séance du 5 juin 1880.

PAR M. GILBERT GOVI.

TRADUITE DE L'ITALIEN PAR M. ARISTIDE MARRE.

Tous les hommes d'étude savent comment de *Balthasar Boncompagni*, après s'être adonné aux Mathématiques et y avoir laissé des traces durables, s'est dévoué tout entier à la recherche et à la publication des documents qui se rapportent à l'histoire de la science qui a sa prédilection. Fatigues, dépenses, sacrifices, rien ne lui paraît lourd quand il s'agit de faire progresser nos connaissances dans cette branche de l'Histoire; il a enrichi les bibliothèques de ses publications sur ce sujet, et son *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche* a pendant douze ans stimulé et satisfait la curiosité des mathématiciens érudits. Certes ils déploreront tous la cessation de ce précieux Recueil. Impartial, le prince Boncompagni a

cherché partout ce qui pouvait se rapporter à ses études, mais son cœur d'Italien l'a fait choisir de préférence tout ce qui pouvait tourner à la plus grande gloire de notre pays. Ainsi, après ses importants travaux sur les écrits de Pacioli, Fibonacci, etc., il s'est mis à recueillir tout ce qu'il a pu découvrir de notre illustre Lagrange ; et c'est le fruit de ces recherches, et de quelques autres relatives à des mathématiciens étrangers, que j'ai l'honneur d'offrir aujourd'hui de sa part à notre Académie.

Ces publications ont presque l'importance de manuscrits originaux, car pour la plupart elles sont des reproductions photolithographiques, tirées à un très petit nombre d'exemplaires.

La photolithographie de onze lettres autographes de Lagrange, entre autres, sera sans doute accueillie avec la plus grande faveur par tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques. Ces lettres, dont les originaux se trouvent à Pétersbourg, dans les Archives de la salle des Conférences de l'Académie impériale des Sciences, furent signalées au prince Boncompagni par feu le professeur Joseph Somoff, en 1871. Elles vont du 28 juin 1754 au 28 octobre 1762 ; la première fut écrite par Lagrange à l'âge de dix-huit ans, la dernière à près de vingt-sept ans (il est né le 25 janvier 1736).

La première de ces lettres, qui est du 28 juin 1754 (4° *Kalend. Julii*), reproduit la série exprimant les différentielles et les intégrales successives d'un produit, série que, dès le 23 juin de cette même année, Lagrange avait envoyée au comte Toschi di Fagnano. Bien que la date de l'année manque dans la lettre à Euler, le post-scriptum dans lequel Lagrange parle à son illustre correspondant de Christian Wolff, mort arrivée à Halle le 19 avril 1754, lui assigne indubitablement pour date cette même année. Lagrange avait alors dix-huit ans

à peine. Dans cette lettre Lagrange demande à Euler si la série qu'il a trouvée ne serait point, par hasard, la même (il reconnut depuis qu'elle l'était en effet) que celle donnée déjà par Leibnitz pour la valeur de $\int y\,dx$, et montre ainsi, en même temps, l'extrême pénétration de son génie analytique, et l'ingénuité et la modestie de son caractère.

Dans la septième lettre de ce Recueil, écrite de Turin le 24 novembre 1759, Lagrange dit à Euler :

« Je suis parfaitement d'accord avec vous, Monsieur : les vraies lois de la propagation du son dépendent de la considération d'une triple dimension dans l'air, et c'est de là qu'on doit aussi tirer la théorie de la diminution du son ; car, en ne regardant qu'une ligne physique, il est tout naturel, et le calcul le montre aussi, que la force du son ne doit souffrir d'elle-même aucune diminution ; je doute que la proportion connue de la diminution en raison inverse des quarrés des distances soit assez exacte, mais ce n'est que par un calcul tout à fait rigoureux qu'on pourra s'en assurer. »

Lagrange revint plus d'une fois sur cette question de la propagation du son, comme on peut le voir dans les Volumes des *Miscellanea Taurinensia,* tantôt se trouvant pleinement d'accord avec Euler, tantôt s'en éloignant quelque peu. Il y revint dans sa correspondance avec Euler lui-même, et dans sa neuvième lettre, datée de Turin le 1er mars 1760, le jeune géomètre en écrit ainsi à l'illustre directeur de l'Académie de Berlin :

« Il n'y a de différence entre vos résultats et les miens qu'en ce qui regarde l'affaiblissement des ébranlements, dont vous faites diminuer la force en raison inverse des distances, lorsqu'elles sont assez grandes [1], au lieu que

(1) Dans le second Volume des *Miscellanea Taurinensia* (1760-1761).

cherché partout ce qui pouvait se rapporter à ses études. mais son cœur d'Italien l'a fait choisir de préférence tout ce qui pouvait tourner à la plus grande gloire de notre pays. Ainsi, après ses importants travaux sur les écrits de Pacioli, Fibonacci, etc., il s'est mis à recueillir tout ce qu'il a pu découvrir de notre illustre Lagrange; et c'est le fruit de ces recherches, et de quelques autres relatives à des mathématiciens étrangers, que j'ai l'honneur d'offrir aujourd'hui de sa part à notre Académie.

Ces publications ont presque l'importance de manuscrits originaux, car pour la plupart elles sont des reproductions photolithographiques, tirées à un très petit nombre d'exemplaires.

La photolithographie de onze lettres autographes de Lagrange, entre autres, sera sans doute accueillie avec la plus grande faveur par tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques. Ces lettres, dont les originaux se trouvent à Pétersbourg, dans les Archives de la salle des Conférences de l'Académie impériale des Sciences, furent signalées au prince Boncompagni par feu le professeur Joseph Somoff, en 1871. Elles vont du 28 juin 1754 au 28 octobre 1762; la première fut écrite par Lagrange à l'âge de dix-huit ans, la dernière à près de vingt-sept ans (il est né le 25 janvier 1736).

La première de ces lettres, qui est du 28 juin 1754 (4° *Kalend. Julii*), reproduit la série exprimant les différentielles et les intégrales successives d'un produit, série que, dès le 23 juin de cette même année, Lagrange avait envoyée au comte Toschi di Fagnano. Bien que la date de l'année manque dans la lettre à Euler, le post-scriptum dans lequel Lagrange parle à son illustre correspondant de la mort de Christian Wolff, mort arrivée à Halle le 19 avril 1754, lui assigne indubitablement pour date cette même année. Lagrange avait alors dix-huit ans

à peine. Dans cette lettre Lagrange demande à Euler si la série qu'il a trouvée ne serait point, par hasard, la même (il reconnut depuis qu'elle l'était en effet) que celle donnée déjà par Leibnitz pour la valeur de $\int y\,dx$, et montre ainsi, en même temps, l'extrême pénétration de son génie analytique, et l'ingénuité et la modestie de son caractère.

Dans la septième lettre de ce Recueil, écrite de Turin le 24 novembre 1759, Lagrange dit à Euler :

« Je suis parfaitement d'accord avec vous, Monsieur : les vraies lois de la propagation du son dépendent de la considération d'une triple dimension dans l'air, et c'est de là qu'on doit aussi tirer la théorie de la diminution du son ; car, en ne regardant qu'une ligne physique, il est tout naturel, et le calcul le montre aussi, que la force du son ne doit souffrir d'elle-même aucune diminution ; je doute que la proportion connue de la diminution en raison inverse des quarrés des distances soit assez exacte, mais ce n'est que par un calcul tout à fait rigoureux qu'on pourra s'en assurer. »

Lagrange revint plus d'une fois sur cette question de la propagation du son, comme on peut le voir dans les Volumes des *Miscellanea Taurinensia*, tantôt se trouvant pleinement d'accord avec Euler, tantôt s'en éloignant quelque peu. Il y revint dans sa correspondance avec Euler lui-même, et dans sa neuvième lettre, datée de Turin le 1er mars 1760, le jeune géomètre en écrit ainsi à l'illustre directeur de l'Académie de Berlin :

« Il n'y a de différence entre vos résultats et les miens qu'en ce qui regarde l'affaiblissement des ébranlements, dont vous faites diminuer la force en raison inverse des distances, lorsqu'elles sont assez grandes [1], au lieu que

---

[1] Dans le second Volume des *Miscellanea Taurinensia* (1760-1761)

cette raison se trouve, selon mes calculs, toujours l'inverse des quarrés des distances; mais c'est une méprise que j'ai reconnue ensuite et dans laquelle je n'ai été entraîné qu'en considérant l'équation intégrale

$$z = \int \frac{x\varphi'(x + t\sqrt{c})}{x^2},$$

qui m'était d'abord résultée, sans y donner l'attention nécessaire. »

La rectification de la *méprise* à laquelle Lagrange fait ici allusion devrait se trouver dans la seconde dissertation *sur le son*, imprimée dans le second Volume des *Miscellanea Taurinensia*, où on lit en effet, de la page 11 à la page 171, les *Nouvelles Recherches sur la nature et la propagation du son*, par M. de Lagrange, dans lesquelles (à la page 80) il est dit :

« .... En général les valeurs de z et de u diminuent dans la raison inverse de $t\sqrt{c}$, ce qui montre que la force ou l'intensité du son doit décroître à très peu près dans la raison inverse des distances simples du centre de propagation. »

La dernière lettre de Lagrange (la onzième du Recueil) est datée de Turin le 38 (lisez le 28) octobre 1762. Dans cette lettre l'illustre mathématicien écrit à Euler, avec une rare modestie, qu'il a abandonné l'idée de publier un Traité sur la Méthode des *maxima* et des *minima*,

---

se trouve, aux pages 1-10, une Lettre d'Euler à Lagrange (Berlin, 1er janvier 1760) dans laquelle on lit (p. 10) : « Ensuite ces formules nous apprennent que lorsque les distances V sont fort grandes, en sorte que les termes divisés par V^2 s'évanouissent à l'égard des autres divisés par V, tant les petits espaces $\underline{u}$ que les vitesses $\left(\frac{du}{dt}\right)$ diminuent en raison des distances; d'où l'on peut justement juger de l'affaiblissement du son par des grandes distances. »

parce qu'il a appris qu'Euler voulait s'en occuper, et il finit en disant :

« Je suis impatient de pouvoir profiter des nouvelles lumières que vous aurez sans doute répandues sur une matière si difficile ; en attendant, je vous prie de recevoir ici mes très humbles remerciements de l'honneur que vous avez bien voulu me faire, et que je regarde comme la récompense la plus flatteuse de mes études mathématiques. »

Quatre années après, en 1766, Euler ayant quitté Berlin, Frédéric II fit offrir à Lagrange la présidence de l'Académie avec 6000 livres de traitement et se servit de d'Alembert pour cette négociation. Lagrange accepta, et le jeudi 6 novembre 1766, à son arrivée à Berlin, il fut mis en possession, à l'âge de trente ans, de la présidence académique que venait d'abandonner le grand mathématicien de Bâle.

Les onze lettres de Lagrange éditées par Balthasar Boncompagni sont accompagnées de deux analyses de ces lettres mêmes, l'une du professeur Angelo Genocchi, l'autre de M. Maurice Cantor. Dans ces deux analyses, on rencontre un grand nombre de renseignements relatifs à Lagrange et à ses œuvres, que les amateurs studieux pourront consulter avec fruit.

Vient ensuite, par ordre de temps, le fac-similé d'une lettre de Lagrange à *Canterzani*, écrite de Berlin le 6 avril 1773 et extraite de la bibliothèque de l'Université de Bologne, dans laquelle il remercie l'Institut de Bologne de l'honneur qu'il lui a fait en l'admettant au nombre de ses Membres.

Une autre lettre de Lagrange à Laplace, provenant de la Bibliothèque de Berlin, peut sûrement être attribuée à l'année 1782, bien que la date y manque. Mme la marquise de Laplace, en janvier 1843, fit don de cette lettre

parle à sa correspondante et lui indique quelques corrections à faire à son Livre des *Disquisitiones arithmeticæ*. La découverte de Vesta, faite par Olbers le 29 mars 1807, offre à Gauss l'occasion de parler de sa *Theoria motus corporum cœlestium*, publiée seulement deux ans plus tard, mais qu'il avait mise à l'épreuve en calculant l'orbite de la nouvelle planète. La lettre se termine par ces mots :

« Continuez, Mademoiselle, de me favoriser de votre amitié et de votre correspondance, qui font mon orgueil, et soyez persuadée que je suis et serai toujours, avec la plus haute estime, votre plus sincère admirateur (¹). »

A cette lettre sont joints quelques mots prononcés par l'illustre géomètre Michel Chasles en la présentant à l'Académie des Sciences de Paris.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Ed. Dewulf, lieutenant-colonel du Génie.

« .... Un ovale de Descartes étant défini comme lieu géométrique des points dont les distances à un point et à un cercle donnés sont dans un rapport constant, on connaît un moyen très simple de mener une tangente à la courbe en un de ses points. Je viens de trouver un autre moyen, un peu moins simple il est vrai, de tracer

---

(¹) On sait que M. Aristide Marre, qui a déjà obtenu qu'on décorât du nom de Sophie Germain une des rues de Paris, a présenté au Conseil municipal le vœu qu'une statue de Sophie Germain figurât parmi celles qu'on doit ériger sur la façade du nouvel Hôtel de Ville, et que ce vœu a reçu le chaleureux appui de l'Association française pour l'avancement des Sciences. (*Note du Rédacteur.*)

celle qui est intitulée *Geschichte der Mathematik,* et qui est due à Abraham Gotthelf Kaestner, de Leipzig, mort à Göttingue le 20 juin 1800. Cet Ouvrage, en quatre volumes in-octavo, fut publié de 1796 à 1800.

Enfin un autre opuscule contient la nécrologie de Joseph Ivanowitch Somoff, mathématicien russe, écrite par André Somoff, et traduite en français par le Dr Jules Hoüel. Comme appendice à cette nécrologie est jointe la lettre de Somoff au prince B. Boncompagni, dans laquelle ce savant mathématicien révèle au prince l'existence à Pétersbourg des onze lettres de Lagrange que Balthasar Boncompagni a fait photolithographier et dont j'ai parlé plus haut.

Outre ces documents relatifs à Lagrange, de Balthasar Boncompagni a fait reproduire par la photolithographie une lettre inédite du célèbre Gauss à Mlle Sophie Germain, très savante mathématicienne française, et cette reproduction, il l'envoie aussi en don à notre Académie. La lettre de Gauss est du 30 avril 1807. L'illustre mathématicien accomplissait en ce jour sa trentième année; Mlle Sophie Germain avait alors trente et un ans. Depuis quelque temps déjà, la jeune mathématicienne française écrivait à Gauss sous le pseudonyme de *Le Blanc,* et elle ne lui révéla son nom qu'au moment où, pour lui venir en aide durant la campagne d'Allemagne, elle pensa à lui envoyer pour le général Pernety une lettre de recommandation, dont Gauss heureusement n'eut pas besoin. Dans sa lettre à Mlle Sophie Germain, le célèbre géomètre lui prodigue les plus grands éloges, mais ne lui en démontre pas moins pour cela comment deux propositions relatives à la théorie des nombres, qu'elle énonçait comme étant générales, ne l'étaient pas.

La théorie des résidus cubiques et biquadratiques déjà établie venait d'être perfectionnée par Gauss, qui en

parle à sa correspondante et lui indique quelques corrections à faire à son Livre des *Disquisitiones arithmeticæ*. La découverte de Vesta, faite par Olbers le 29 mars 1807, offre à Gauss l'occasion de parler de sa *Theoria motus corporum cœlestium*, publiée seulement deux ans plus tard, mais qu'il avait mise à l'épreuve en calculant l'orbite de la nouvelle planète. La lettre se termine par ces mots :

« Continuez, Mademoiselle, de me favoriser de votre amitié et de votre correspondance, qui font mon orgueil, et soyez persuadée que je suis et serai toujours, avec la plus haute estime, votre plus sincère admirateur (¹). »

A cette lettre sont joints quelques mots prononcés par l'illustre géomètre Michel Chasles en la présentant à l'Académie des Sciences de Paris.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Ed. Dewulf, lieutenant-colonel du Génie.

«.... Un ovale de Descartes étant défini comme lieu géométrique des points dont les distances à un point et à un cercle donnés sont dans un rapport constant, on connaît un moyen très simple de mener une tangente à la courbe en un de ses points. Je viens de trouver un autre moyen, un peu moins simple il est vrai, de tracer

(¹) On sait que M. Aristide Marre, qui a déjà obtenu qu'on décorât du nom de *Viète* l'une des rues de Paris, a présenté au Conseil municipal le vœu qu'une statue de Sophie Germain figurât parmi celles qu'on doit ériger sur la façade du nouvel Hôtel de Ville, et que ce vœu a reçu le chaleureux appui de l'Association française pour l'avancement des Sciences. (*Note du Rédacteur.*)

cette tangente, mais ce procédé conduit à des conséquences que je développerai quelque jour dans votre Journal. Je vous prie, pour le moment, de proposer comme question à résoudre la construction que je vais indiquer; je saurai ainsi si la construction est réellement nouvelle, comme je le pense. »

On donne une circonférence de cercle dont le centre est le point C, *et un point fixe* A. *On sait que le lieu géométrique des points dont les distances au point* A *et au cercle* (C) *sont dans un rapport constant est un ovale de Descartes.*

Soient P *un point de la courbe*, N *le point où* PC *coupe le cercle* (C). *Si l'on élève en* P *une perpendiculaire à* PC *qui coupe* AC *en* P'; *si l'on mène par* P' *une parallèle à* AN *qui coupe en* P'' *la perpendiculaire en* P *à* AP; *si, ensuite, on élève en* P' *une perpendiculaire à* PP', *et en* P'' *une perpendiculaire à* PP'', *ces perpendiculaires se coupent en un point* Q, *et la droite* PQ *est la tangente en* P *à l'ovale de Descartes.*

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Questions de Géométrie élémentaire. Méthodes et solutions, avec un exposé des principales théories et de nombreux exercices proposés. Ouvrage destiné aux élèves des lycées depuis la classe de troisième jusqu'à celle de Mathématiques spéciales inclusivement. Par M. *Desboves*, agrégé et docteur ès sciences, Membre de l'Académie des Sciences, des Lettres et des Arts d'Amiens. 3e édition, revue et augmentée.

Paris, librairie Ch. Delagrave, 15, rue Soufflot (1880).

2. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ALGÈBRE, par *A. Boset*, ingénieur honoraire des Mines, candidat en sciences physiques et mathématiques, professeur honoraire de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Bruxelles. Bruxelles, Gustave Mayolez, libraire-éditeur, 13, rue de l'Impératrice. Paris, Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins (1880).

3. IL CARTEGGIO DI SOFIA GERMAIN E CARLO FEDERICO GAUSS. Nota di *A. Genocchi*. Torino, stamperia reale della ditta G. B. Paravia e Comp. di I. Vigliardi. (1880.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1297

(voir 2e série, t. XVII, p. 527);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Décomposer le quadruple et le carré de $4p^6 + 27q^4$ en une somme de deux cubes.

(ÉDOUARD LUCAS.)

Dans le numéro de février 1880, page 91, on remarque les deux identités

$$(1)\qquad (L+M)^3 + (L-M)^3 = 2L(L^2+3M^2),$$

$$(2)\qquad \begin{cases} (6LM + L^2 - 3M^2)^3 + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 \\ \quad = 2^2.3^2LM(L^2+3M^2)^2. \end{cases}$$

Si dans la première on remplace L par $2p^3$ et M par

$\frac{3q^3}{p}$, on a identiquement

$$16p^6 + 108q^6 = \left(2p^2 + \frac{3q^3}{p}\right)^3 + \left(2p^2 - \frac{3q^3}{p}\right)^3.$$

Si dans la seconde on fait $L^2 = \frac{2p^5}{3q}$ et $M^2 = \frac{3q^5}{2p}$, d'où $LM = p^2q^2$, on obtient la seconde décomposition

$$(4p^6 + 27q^6)^2$$
$$= \left(6p^2q^2 + \frac{2p^5}{3q} - \frac{9q^5}{2p}\right)^3 + \left(6p^2q^2 - \frac{2p^5}{3q} + \frac{9q^5}{2p}\right)^3.$$

Question 1313

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. MARCELLO ROCHETTI,
Professeur au lycée royal Campanella, à Reggio (Calabria).

Un nombre p, qui est la somme de n cubes entiers, étant donné, assigner un nombre q tel que le produit p^2q soit la somme algébrique de n cubes entiers.

(S. RÉALIS.)

Posons

$$q = p + p^4 + p^7 + \ldots + p^{3(n-1)+1} = \sum_{n=1}^{n=n} p^{3n-2},$$

il vient

$$(1) \qquad p^2q = p^3 + p^6 + p^9 + \ldots + p^{3n},$$

et le produit p^2q est la somme de n cubes entiers, quel que soit le nombre entier p donné.

QUESTIONS.

1344. Soient a, b, c, d quatre points d'une conique (S), et m un point quelconque; si l'on mène les droites ma, mb, mc, md, qui rencontrent de nouveau la conique (S) en des points a', b', c', d' respectivement, les deux coniques (m, a, b, c, d), (m, a', b', c', d') auront la même tangente au point m. (GENTY.)

1345. Démontrer que toute droite passant par le sommet commun aux trois coniques représentées par les équations

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$2px^2 + \alpha(y^2 - 2px) = 0,$$
$$2px^2 - \alpha(y^2 - 2px) = 0$$

les coupe en trois autres points qui forment avec le sommet une proportion harmonique, quelle que soit la valeur de α. (ED. GUILLET.)

1346. Par les trois sommets d'un triangle on mène trois droites parallèles à une même direction, puis trois autres droites parallèles aussi à une autre direction; ces droites, en se coupant, forment des parallélogrammes, parmi lesquels il y en a trois qui ont chacun un côté du triangle pour une diagonale : démontrer que les secondes diagonales de ces trois parallélogrammes se coupent en un même point. (A. BOILLEAU.)

1347. Six points quelconques étant donnés sur un plan, le lieu géométrique des points tels qu'en les joignant aux six points donnés on obtienne un faisceau en involution, se compose de quinze cubiques du troisième ordre qui passent toutes par les six points donnés.

(DEWULF.)

RECHERCHES SUR DEUX MODES DE TRANSFORMATION DES FIGURES SOLIDES;

PAR M. E. AMIGUES,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

[SUITE (1).]

13. Nous avons vu qu'en général une surface V de classe m, dans la figure ABCD, se transforme, dans la figure A'B'C'D', en une surface V' de classe $3m$, tangente $2m$ fois aux faces du tétraèdre A'B'C'D'.

Demandons-nous quelle est la nature de ce contact. Du point A on peut mener une infinité de plans tangents à la surface V : donc le plan B'C'D' représente une infinité de plans tangents à la surface V'. Donc cette surface V' touche les faces du tétraèdre A'B'C'D' le long d'une courbe.

Pour avoir l'une de ces courbes, il faut chercher l'intersection de la face représentée par l'équation

$$T' = 0,$$

avec la surface dont l'équation tangentielle est

$$f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0.$$

Soit M un point de cette courbe, que nous appellerons U'. Le plan polaire du point M par rapport à la quadrique représentée par l'équation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + T'^2 = 0$$

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 548.

passe par le point D', puisque le point M est dans le plan A'B'C'. Mais, comme le point M est également sur la surface V', ce plan polaire est aussi tangent à la surface V'_1, polaire réciproque de la surface V', par rapport à cette quadrique directrice, surface V'_1 dont l'équation est

$$(18) \qquad f\left(\frac{1}{\lambda X'}, \frac{1}{\mu Y'}, \frac{1}{\nu Z_1}, \frac{1}{\rho T'}\right) = 0;$$

alors le plan polaire du point M est tangent au cône ayant D' pour sommet et circonscrit à la surface V'_1.

Donc, la polaire du point M, par rapport à la conique représentée par l'équation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0,$$

est tangente à la base de ce cône sur le plan A'B'C'.

Ainsi la courbe U', lieu du point M, est la polaire réciproque, par rapport à la conique représentée par l'équation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0,$$

de la base U'_1 d'un cône bien connu.

L'étude de la courbe U' revient donc à celle de la courbe U'_1, ou encore à l'étude du cône dont cette dernière courbe est la base.

L'équation (18) se met sous la forme

$$(19) \qquad \varphi(X', Y', Z', T') = 0.$$

Cette équation (19) représente la surface V'_1. Elle est homogène et de degré $3m$, et chaque variable y entre au plus au degré m.

Pour avoir l'équation du cône ci-dessus, il n'y a qu'à éliminer T' entre l'équation (19) et l'équation suivante :

$$(20) \qquad \varphi'_1(X', X', Z', T') = 0.$$

L'équation (19) peut s'écrire

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_{3m}(X', Y', Z') + T'\varphi_{3m-1}(X', Y', Z') + \ldots \\ &\qquad + T'^m \varphi_{2m}(X', Y', Z') = 0, \end{aligned} \right.$$

et par suite l'équation (20) est

$$(22)\quad \varphi_{3m-1}(X', Y', Z') + \ldots + mT'^{m-1}\varphi_{2m}(X', Y', Z') = 0.$$

L'équation résultante est de degré m par rapport aux coefficients de l'équation (22), et de degré $(m-1)$ par rapport à ceux de l'équation (21). Elle est donc, par rapport aux variables, de degré

$$m(3m-1) + (m-1)3m = 6m^2 - 4m = 2m(3m-2).$$

Tel est l'ordre du cône. Voyons les particularités qu'il offre.

Tout coefficient des équations (21) et (22) est au moins de degré m par rapport à l'ensemble des variables X' et Y'. Donc, tout terme de la résultante est, par rapport à l'ensemble de ces mêmes variables, d'un degré au moins égal à

$$(m + \overline{m-1})m = (2m-1)m.$$

Si donc, dans l'équation du cône, on fait

$$X' = hY',$$

Y' est facteur $(2m-1)m$ fois, ce qui prouve que le cône contient chacune des arêtes du tétraèdre qui passent en D' un nombre de fois égal à $(2m-1)m$.

La conclusion de l'étude que nous venons de faire est que la courbe U'_1 est d'ordre $2m(3m-2)$, et que cette courbe a les points A', B', C' pour points multiples d'ordre $(2m-1)m$.

Passant enfin à la courbe U', on voit qu'elle est de classe $2m(3m-2)$ et qu'elle a les trois côtés du triangle $A'B'C'$ pour tangentes multiples d'ordre $(2m-1)m$.

14. L'équation d'un point dans les figures ABCD est

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S = 0. \tag{23}$$

A ce point correspond, dans la figure A'B'C'D', une surface de troisième classe dont l'équation tangentielle est

$$\frac{\alpha}{\lambda P'} + \frac{\beta}{\mu Q'} + \frac{\gamma}{\nu R'} + \frac{\delta}{\rho S'} = 0. \tag{24}$$

D'après nos théories générales, cette surface a pour plans tangents doubles les faces du tétraèdre A'B'C'D'. Chacune de ces faces touche la surface le long d'une courbe de deuxième classe (conique), et cette courbe est inscrite au triangle qui constitue cette face.

De l'équation tangentielle (24) passons à l'équation en coordonnées tétraédriques, équation qui est

$$\sqrt{\frac{\alpha X'}{\lambda}} + \sqrt{\frac{\beta Y'}{\mu}} + \sqrt{\frac{\gamma Z'}{\nu}} + \sqrt{\frac{\delta T'}{\rho}} = 0.$$

Sous cette forme, on reconnait une surface du quatrième ordre, qui porte le nom de *quartique de Steiner*.

Cette surface a été étudiée par Kummer, Weierstrass, Schröter, Cremona. Nous la considérerons ici comme la transformée d'un point.

15. Théorème V. — *Si deux surfaces se touchent en un point, il en est de même des transformées.*

Soient deux surfaces définies par les équations tangentielles

$$(A)\qquad \begin{cases} f(P, Q, R, S) = 0, \\ \varphi(P, Q, R, S) = 0. \end{cases}$$

Ces surfaces seront tangentes en un point, si le système formé par les équations (A) et les équations sui-

vantes :

$$(B)\qquad \frac{f'_P}{\varphi'_P} = \frac{f'_Q}{\varphi'_Q} = \frac{f'_R}{\varphi'_R} = \frac{f'_S}{\varphi'_S}$$

admet une solution.

Les surfaces transformées sont définies par les équations tangentielles

$$(A')\qquad \begin{cases} f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0, \\ \varphi\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0. \end{cases}$$

Elles seront tangentes en un point si le système formé par les équations (A′) et par les équations suivantes,

$$(B')\qquad \frac{f'_{P'}}{\varphi'_{P'}} = \frac{f'_{Q'}}{\varphi'_{Q'}} = \frac{f'_{R'}}{\varphi'_{R'}} = \frac{f'_{S'}}{\varphi'_{S'}},$$

admet une solution.

Tout revient donc à prouver que, si le système (A), (B) admet une solution, le système (A′), (B′) en admet une aussi, ce qui devient évident si l'on observe que

$$f'_P\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = -\frac{1}{\lambda P'^2} f'_P(P, Q, R, S),$$

et par suite que

$$\frac{f'_{P'}}{\varphi'_{P'}} = \frac{f'_P}{\varphi'_P}.$$

Corollaire. — Si le système (A), (B) admet une infinité de solutions, il en est de même du système (A′), (B′). En d'autres termes, si deux surfaces se touchent le long d'une courbe, il en est de même des surfaces transformées.

Remarque. — On sait qu'il y a deux espèces d'enveloppes : 1° celles qui touchent chaque enveloppée en

un point seulement : 2° celles qui touchent chaque enveloppée le long d'une courbe, appelée par Monge la *caractéristique de l'enveloppe*.

On a alors les deux théorèmes suivants :

1° *La transformée d'une enveloppe de première espèce est enveloppe de première espèce des surfaces transformées. En particulier, si un point décrit une surface, la quartique de Steiner qui correspond à ce point a pour enveloppe de première espèce la transformée de cette surface.*

2° *La transformée d'une enveloppe de deuxième espèce est enveloppe de deuxième espèce des surfaces transformées.*

16. Avant d'aller plus loin, il est bon d'interpréter géométriquement les relations (12) :

$$\lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR' = \rho SS'.$$

THÉORÈME VI. — *Si l'on établit une correspondance de plan à plan par les relations* (12) *et si l'on désigne par* M *et* M' *les points où deux plans correspondants quelconques rencontrent deux arêtes de même nom* AB *et* A'B', *le produit*

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{M'B'}{M'A'}$$

est constant quels que soient les deux plans correspondants que l'on considère.

Cherchons, en effet, le point M où le plan ayant pour équation

$$PX + QY + RZ + ST = 0$$

coupe l'arête AB; et pour cela, dans l'équation de ce plan, supposons

$$Z = 0 \quad \text{et} \quad T = 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{X}{Y} = -\frac{Q}{P};$$

d'où, en désignant les aires des faces par A, B, C, D,

$$\frac{AX}{BY} = -\frac{Q}{P} \times \frac{A}{B},$$

AX et BY représentent, au signe près, les triples volumes des tétraèdres BMCD et AMCD, de sorte que leur rapport est $\pm \frac{BM}{AM}$, suivant que le point M se trouve sur l'arête AB elle-même, ou sur son prolongement. Si donc on convient de donner un signe implicite à ce rapport, en le regardant comme positif quand le point M est sur l'arête même et comme négatif quand le point M est sur un prolongement, on a dans tous les cas

$$\frac{BM}{AM} = -\frac{Q}{P} \times \frac{A}{B}.$$

On a par analogie, en faisant la même convention :

$$\frac{B'M'}{A'M'} = -\frac{Q'}{P'} \times \frac{A'}{B'};$$

multipliant membre à membre, on obtient

$$(25) \qquad \frac{BM}{AM} \times \frac{B'M'}{A'M'} = \frac{QQ'}{PP'} \times \frac{AA'}{BB'},$$

relation *absolument générale*.

Si maintenant nous faisons correspondre les plans entre eux par les relations (12), la relation (25) s'écrit

$$(26) \qquad \frac{BM}{AM} \times \frac{B'M'}{A'M'} = \frac{\lambda AA'}{\mu BB'},$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème VII. — *Réciproquement, si les produits tels que*

$$\frac{BM}{AM}\times\frac{B'M'}{A'M'}$$

restent les mêmes quand on fait varier les plans correspondants, ces plans satisfont aux conditions (12).

On a, par hypothèse,

$$\frac{BM}{AM}\times\frac{B'M'}{A'M'}=K,$$

K étant une constante. Comparons cette hypothèse à la relation (25), qui est toujours vraie; on obtient

$$K=\frac{QQ'}{PP'}\times\frac{AA'}{BB'},$$

ou bien

$$QQ'=K\frac{BB'}{AA'}PP';$$

on a de même

$$RR'=K_1\frac{CC'}{AA'}PP',$$

$$SS'=K_2\frac{DD'}{AA'}PP'.$$

Posant alors

$$K\frac{BB'}{AA'}=\frac{\lambda}{\mu},\quad K_1\frac{CC'}{AA'}=\frac{\lambda}{\nu},\quad K_2\frac{DD'}{AA'}=\frac{\lambda}{\rho},$$

on obtient

$$\lambda PP'=\mu QQ'=\nu RR'=\rho SS'.$$

17. Théorème VIII. — *Dans une transformation définie par les relations* (12), *pour que les plans de l'infini se correspondent, il faut et il suffit que les valeurs de* λ, μ, ν, ρ *soient définies par les équations*

$$\lambda AA'=\mu BB'=\nu CC'=\rho DD'.$$

En effet, le plan de l'infini dans le système ABCD a pour équation

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

A, B, C, D étant les aires des faces.

Le plan qui lui correspond dans l'autre système a donc pour équation

$$\frac{X'}{\lambda A} + \frac{Y'}{\mu B} + \frac{Z'}{\nu C} + \frac{T'}{\rho D} = 0.$$

Il faut identifier ce dernier avec le plan qui a pour équation

$$A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' = 0,$$

ce qui donne bien les relations

$$(27) \qquad \lambda AA' = \mu BB' = \nu CC' = \rho DD'.$$

Ce sont là les conditions nécessaires et suffisantes pour que les plans de l'infini se correspondent.

Théorème IX. — *Dans tout système de transformation établissant une correspondance de plan à plan, si les plans de l'infini se correspondent, les arêtes de même nom de deux tétraèdres sont coupées par les plans correspondants dans des rapports réciproques.*

Si l'on voulait se borner aux transformations définies par les relations (12), la démonstration serait très simple : il n'y aurait qu'à considérer la formule (26) et les analogues et à y tenir compte de l'hypothèse, savoir

$$\lambda AA' = \mu BB' = \nu CC' = \rho DD'.$$

Mais il y a grand intérêt, en vue des applications géométriques, à établir le théorème actuel d'une façon générale.

Remarquons que, dans les faces de même nom qui forment les trièdres A et A′, on a des transformations où une droite correspond à une droite et où les droites de l'infini se correspondent.

Donc les traces d'un plan quelconque sur les faces du trièdre A et les traces du plan correspondant sur les faces du trièdre A′ coupent les arêtes de même nom issues du point A et du point A′ dans des rapports réciproques.

On raisonnerait de même pour les sommets B et B′ (1).

(*A suivre.*)

THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

PAR M. WEILL.

[FIN (2).]

Le théorème consiste en ceci : si l'on transforme l'équation (1) au moyen de la relation (2), l'équation du quatrième degré ainsi obtenue aura *quatre racines communes avec l'équation* (1), *si elle en a une seule;* cette condition sera remplie, s'il existe entre les coefficients des deux équations de la parabole et de l'autre conique la relation

$$(4) \qquad \Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0,$$

Θ, Δ et Θ' étant les coefficients de l'équation en λ des deux coniques. La relation (4) est ici

$$p^2C^2 + 4pCD - 8BEp + 4AF = 0.$$

---

(1) Voir nos *Recherches sur les transformations du second ordre dans les figures planes* (*Nouvelles Annales*, 1877).

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 367 à 378.

On sait, en particulier, que, lorsqu'un cercle passe par le foyer de la parabole, on peut inscrire à ce cercle un triangle circonscrit à la parabole; en appliquant à ce cas les considérations qui précèdent, on arrive à des propriétés fort simples et susceptibles de différents énoncés; nous n'insisterons pas sur cette question.

Reprenons le système des deux coniques dont les équations sont

$$(1) \qquad K\alpha\beta - L\gamma^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \beta(A\alpha + B\gamma) - C\alpha^2 = 0.$$

Nous avons démontré que l'on a ainsi le *système général* de deux coniques telles qu'un triangle soit circonscrit à la première et inscrit à la seconde.

En donnant aux fonctions linéaires α, β, γ diverses valeurs, parmi lesquelles se trouvent en particulier des valeurs constantes pour l'une des trois fonctions, on obtient tous les systèmes possibles de deux coniques jouissant de la propriété énoncée, et l'on est conduit ainsi à un nombre indéfini de propriétés nouvelles des coniques. Nous nous contenterons d'énoncer quelques propriétés auxquelles donnent lieu les systèmes les plus simples.

Considérons une hyperbole équilatère et une parabole ayant pour équations

$$xy - K^2 = 0,$$

$$y^2 - 2px = 0.$$

On peut inscrire dans l'hyperbole une infinité de triangles qui soient circonscrits à la parabole. Considérons l'un de ces triangles, et désignons par x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 les coordonnées des sommets, et par m_1, m_2, m_3 les coefficients angulaires des côtés, on a les

relations

$$x_1 x_2 = \frac{-K^2}{m_1}, \quad m_1 m_2 = \frac{p}{2x^2},$$

$$x_2 x_3 = \frac{-K^2}{m_2}, \quad m_2 m_3 = \frac{p}{2x_3},$$

$$x_3 x_1 = \frac{-K^2}{m_3}, \quad m_3 m_1 = \frac{p}{2x_1},$$

$$y_1 = \frac{K^2}{x_1}, \quad y_2 = -m_1 x_1, \quad y_3 = \frac{-p}{2m_1}.$$

On en conclut :

1° Le produit des abscisses des sommets du triangle variable est constant.

2° Le produit des ordonnées est constant.

3° Le produit des coefficients angulaires des côtés est constant.

4° Le centre de gravité du triangle est sur l'axe de la parabole.

5° Le centre du cercle circonscrit décrit une droite parallèle à l'axe de la parabole.

6° Le point de concours des hauteurs est fixe.

7° Les pieds des hauteurs décrivent la *focale à nœud*.

8° L'équation qui donne les ordonnées des trois sommets est

$$y^3 + \lambda y - \frac{K^2 p}{2} = 0,$$

λ étant un paramètre variable. Cette équation permet d'étudier très facilement les propriétés du système.

9° Le triangle formé par les points de contact des côtés avec la parabole se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux paraboles fixes ; son centre de gravité est sur l'axe de la première ; le produit des ordonnées des sommets de ce triangle et le produit des abscisses sont tous deux constants.

10° Les normales aux points de contact des côtés du triangle avec la parabole sont concourantes; le lieu du point de concours de ces normales est une parallèle à l'axe de la parabole.

11° Si d'un point on mène les trois normales à une parabole, on peut construire une parabole tangente aux trois côtés du triangle formé par les pieds des normales et ayant pour sommet le sommet de la première et pour axe la tangente au sommet de la première. Le paramètre de cette parabole est égal à la distance β du point considéré à l'axe de la parabole donnée; donc la parabole dont il s'agit est l'enveloppe de tous les triangles formés par les pieds des normales menées par une série de points situés sur une parallèle à l'axe de la première. Si l'on mène les tangentes à la parabole donnée aux pieds des trois normales, elles forment un triangle dont les sommets décrivent une hyperbole équilatère, ayant pour asymptotes l'axe et la tangente au sommet de la parabole donnée. Cette hyperbole a pour équation

$$xy = \frac{-p\beta}{2}.$$

12° Si d'une série de points, pris sur une parallèle à l'axe d'une série de paraboles ayant même axe et même sommet, mais de paramètre variable, on abaisse des normales sur ces paraboles, on a une série doublement infinie de triangles formés par les pieds des trois normales, et qui sont tous circonscrits à une même parabole ayant pour sommet le sommet des paraboles variables et pour axe la tangente au sommet de ces courbes; le paramètre de cette parabole est égal à la distance de la droite donnée à l'axe des paraboles variables.

13° Si d'une série de points pris sur une parallèle à l'axe d'une parabole on abaisse des normales, la somme

des segments paraboliques déterminés par les ordonnées des pieds des trois normales reste constante.

Considérons encore le système formé par une parabole et une hyberbole ayant pour équations

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$xy - K^2 = 0.$$

On peut inscrire à la parabole une infinité de triangles circonscrits à l'hyperbole :

Le produit des abscisses des sommets, le produit des ordonnées et le produit des coefficients angulaires des côtés du triangle sont constants. Le centre du cercle circonscrit au triangle décrit une parallèle à l'axe : ce cercle enveloppe une courbe du troisième degré, telle que le produit de la distance d'un de ses points à une droite par la puissance de ce point par rapport à un cercle fixe est constant. Le centre de gravité du triangle décrit une parabole ayant pour équation

$$y^2 - \frac{2}{3}px = 0.$$

L'équation qui donne les ordonnées des trois sommets est

[illegible] $- 2pK^2 = 0$ [illegible]

Les milieux des côtés [illegible] une courbe du quatrième degré [illegible] l'équation [illegible] est

[illegible] K^2 [illegible]

Les [illegible] qui joignent les [illegible] des [illegible] une parabole ayant pour équation

[illegible]

On a ainsi un triangle qui se déplace en restant inscrit dans une courbe du quatrième degré, et circonscrit à une parabole. Considérons ce triangle dans l'une de ses positions ; un de ses côtés, qui est tangent à la parabole dont nous venons de parler, a une équation de la forme

$$x = my - \frac{2K^2}{mp}.$$

Soient A, B, C les trois sommets du triangle que nous considérons ; les trois valeurs de m qui définissent les trois côtés sont données par une équation facile à former et qui est

$$(1) \qquad \left(\lambda + \frac{2p}{m}\right)^2 + K^2 m = 0.$$

Le côté AB rencontre la courbe du quatrième degré en quatre points dont les ordonnées sont données par l'équation

$$(2) \qquad y^4 - 2pmy^3 + y^2\left(p^2m^2 + \frac{4K^2}{m}\right) - 3K^2py + \frac{4K^4}{m^2} = 0.$$

Éliminons m entre les équations (1) et (2), nous arriverons à une équation du *douzième degré* en y. Elle admettra pour racines les ordonnées des points A, B, C prises chacune deux fois ; donc son premier membre aura pour diviseur le carré du polynôme

$$(3) \qquad 4y^3 + 4\lambda y^2 + \lambda^2 y + pK^2,$$

car ce polynôme égalé à zéro donne les ordonnées des points A, B, C. L'équation du sixième degré, qui restera après suppression de ce facteur, donnera les ordonnées des six points D, E, F, G, H, K, où les côtés du triangle ABC rencontrent encore la courbe du quatrième degré. Ces six racines se partagent en trois groupes de deux : en effet, le côté AB rencontre la courbe du quatrième

degré en deux points D, E auxquels correspond un triangle DEL analogue de ABC ; les ordonnées des sommets de ce triangle sont données par l'équation

$$(4) \qquad 4y^3 + 4\lambda' y^2 + \lambda'^2 y + pK^2 = 0,$$

dans laquelle λ' désigne la seconde racine de l'équation (1) résolue par rapport à λ, en appelant première racine celle qui nous a donné le triangle ABC. Donc l'équation du sixième degré aura deux racines communes avec l'équation (4), et de même avec deux autres équations analogues. Soit λ_1 la valeur de λ qui définit le triangle ABC ; les six points D, E, F, G, H, K donnent lieu à trois autres triangles correspondant à des valeurs de λ données par l'équation

$$(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda + \lambda_1) - 16pK^2 = 0.$$

Si nous éliminons λ entre cette équation et l'équation (4), nous aurons une équation du neuvième degré dont les racines seront les ordonnées des neuf sommets des trois triangles ; cette équation du neuvième degré, dont le premier membre est évidemment décomposable en un produit de trois facteurs du troisième degré, est aussi décomposable en un produit de deux facteurs, l'un du sixième degré et l'autre du troisième ; le facteur du sixième n'est autre que le produit des facteurs du premier degré correspondant aux six points D, E, F, G, H, K ; donc ce facteur est celui que l'on obtient dans l'équation du douzième degré envisagée plus haut ; quant au second facteur, qui est du troisième degré, il donnera les ordonnées des trois autres sommets des trois triangles. Cette identité remarquable, que nous venons d'obtenir entre un produit de trois facteurs du troisième degré et un produit de deux facteurs, l'un du sixième degré et l'autre du troisième, se présentera chaque fois que l'on aura à

envisager un triangle variable circonscrit à une conique et inscrit dans une courbe du quatrième degré.

On peut remarquer que le produit des ordonnées des six points D, E, F, G, H, K reste constant, ainsi que le produit des ordonnées des trois autres sommets des trois triangles.

Nous citerons encore comme exemples simples :

Un triangle circonscrit à la parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2px$$

et inscrit dans l'hyperbole dont l'équation est

$$y = Ax^2 + Bx.$$

Un triangle circonscrit à la parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2px$$

et inscrit dans l'hyperbole dont l'équation est

$$y = \frac{Ax + B}{Cx}.$$

Un triangle inscrit dans la parabole dont l'équation est

$$y^2 = Kx + C$$

et circonscrit à l'hyperbole dont l'équation est

$$4Bxy + B^2 + 4Cx^2 = 0.$$

Tous ces triangles donnent lieu aux formules

$$x_1 x_2 = \frac{L}{m_1}, \quad m_1 m_2 = \frac{M}{x_2},$$

$$x_2 x_3 = \frac{L}{m_2}, \quad m_2 m_3 = \frac{M}{x_3},$$

$$x_3 x_1 = \frac{L}{m_3}, \quad m_3 m_1 = \frac{M}{x_1}.$$

On déduit de ces formules que le produit des abscisses des sommets et le produit des coefficients angulaires des côtés sont constants.

Nous terminerons par l'énoncé de la propriété suivante :

Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit dans une parabole et circonscrit à une parabole ayant même axe que la première et de paramètre quadruple, la somme des carrés des côtés du triangle reste constante.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. MOREAU

(voir 2e série, t. XIV, p. 527);

SOLUTIONS DE M. MORET-BLANC.

Démontrer les formules

$$1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\ldots=\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)},$$

$$1-\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2-\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\ldots=\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

$$1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2}+\ldots=\frac{\sin n\pi}{n\pi},$$

et indiquer entre quelles limites elles sont exactes.

1° Si l'on développe $(1+x)^{2n}$ par la formule du bi-

nôme, le coefficient de x^μ dans ce développement sera

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}$$

ou, en multipliant haut et bas par $\Gamma(2n-\mu+1)$,

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2n-\mu+1)}.$$

Si l'on développe $(x+1)^{2n}$, le coefficient de $x^{2n-\mu}$ sera de même

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n-\mu+1)\Gamma(\mu+1)}.$$

En posant $2n-\mu=\mu'$, le coefficient de $x^{\mu'}$ sera donc

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(\mu'+1)\Gamma(2n-\mu'+1)}.$$

Si n est fractionnaire, μ sera toujours entier, mais μ' sera fractionnaire, et, comme le coefficient est toujours la même fonction de n et de μ, cette forme subsiste pour les puissances entières ou fractionnaires, pourvu que les exposants successifs de x diffèrent d'une unité. Il en résulte que, si x^n se trouve dans le développement, son coefficient sera

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)}.$$

Or, ce terme en x^n s'obtient en faisant la somme des produits des termes de même rang dans les développements de $(1+x)^n$ et $(x+1)^n$, ce qui donne le premier membre de la première formule : cette formule est donc démontrée.

Il faut toutefois que $\Gamma(2n+1)$ reste fini et positif, ce qui exige que l'on ait $2n+1>0$ ou $n>-\frac{1}{2}$.

2° Le coefficient de x^μ dans le développement de

$(1-x^2)^n$ est, en valeur absolue,

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(n-\frac{\mu}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{\mu}{2}}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(n-\frac{\mu}{2}+1\right)}$$

si μ est pair; il est nul si μ est un nombre impair.

On verra, comme précédemment, que cette forme subsiste pour des valeurs fractionnaires de n.

Si $\mu=n$, c'est-à-dire si le développement renferme un terme en x^n, son coefficient sera égal à $\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, multiplié par une fonction de n qui s'annule pour les valeurs impaires de n et prend les valeurs $+1$ ou -1 pour les valeurs entières paires ou impaires de $\frac{n}{2}$, conditions qui sont remplies par la fonction $\cos\frac{n\pi}{2}$. Le terme en x^n sera donc

$$\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Mais on l'obtient aussi en faisant la somme des produits des termes de même rang dans les développements de $(x+1)^n$ et $(1-x)^n$, ce qui donne pour coefficient le premier membre de la seconde formule; on a donc

$$1-\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 -\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\ldots=\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Il faut toutefois que $\Gamma(n+1)$ reste continu ou que l'on ait $n>-1$.

L'égalité existe évidemment pour toutes les valeurs entières et positives de n; mais ce n'est que par analogie, et en vertu de la continuité, qu'on l'a étendue aux valeurs fractionnaires. Il faut vérifier qu'elle subsiste pour celles-ci.

Soit $n = \frac{1}{2}$. Le second membre de la formule devient

$$\cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma^2(1+\frac{1}{4})},$$

$\log\cos\frac{\pi}{4}$	$\bar{1},8498450$
$\log\Gamma(\frac{3}{2})$	$\bar{1},9475449$
$-2\log\Gamma(\frac{5}{4})$	$0,0853578$
$\log\cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma^2(\frac{5}{4})}$ ...	$\bar{1},8827477$
$\cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma^2(\frac{5}{4})}$ ...	$0,763392.$

C'est aussi la valeur que prend le premier membre quand on y fait $n = \frac{1}{2}$.

La formule subsiste donc pour les valeurs fractionnaires de n.

3° Si l'on développe $\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^n$ en série ordonnée suivant les puissances de x, il est évident que le coefficient de x^μ sera égal à zéro pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de μ, et qu'il se réduira à 1 pour $\mu = 0$.

Or

$$\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^n = (x+1)^n(1+x)^{-n},$$

et l'on obtiendra le coefficient de x^n dans ce développement en multipliant les coefficients des termes de même rang dans les développements de $(x+1)^n$ et de $(1+x)^{-n}$

par la formule du binôme, ce qui donne

$$1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2}+\ldots,$$

valeur qui se réduit à l'unité pour $n=0$ et à zéro pour toute valeur entière positive ou négative de n; elle est donc égale à

$$(1-n^2)\left(1-\frac{n^2}{4}\right)\left(1-\frac{n^2}{9}\right)\left(1-\frac{n^2}{16}\right)\cdots$$

Or on a (Serret, *Trigonométrie*, n° 134)

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right)\cdots,$$

d'où, en remplaçant $\frac{m}{2n}$ par n,

$$\frac{\sin n\pi}{n\pi}=(1-n^2)\left(1-\frac{n^2}{4}\right)\left(1-\frac{n^2}{9}\right)\left(1-\frac{n^2}{16}\right)\cdots$$

Donc

$$1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2}+\ldots=\frac{\sin n\pi}{n\pi}.$$

REMARQUE SUR UN ARTICLE DES NOUVELLES ANNALES;

Par M. C. HENRY.

Les Cahiers d'octobre et de novembre 1879 des *Nouvelles Annales* contiennent des formules pour calculer les puissances semblables des x premiers nombres. Ces formules nous semblent moins simples que celles données, il y a quelques années, par M. Ed. Lucas (*Recherches*

sur l'Analyse indéterminée et l'Arithmétique de Diophante, Moulins, 1873, p. 79-88).

En effet, on a le théorème suivant : *La somme des puissances paires des x premiers nombres est algébriquement divisible par la somme des carrés des x premiers nombres, et le quotient est une fonction entière de $y = x(x+1)$, c'est-à-dire du double de la somme des x premiers nombres*. En désignant par q_{2i} le quotient de S_{2i} par S_2, on a (*Recherches sur l'Analyse indéterminée*, p. 85) les formules

$$5q_4 = 3y - 1,$$
$$7q_6 = 3y^2 - 3y + 1,$$
$$9q_8 = 3y^3 - 6y^2 + \frac{27}{5}y - \frac{9}{5},$$
$$11q_{10} = 3y^4 - 10y^3 + 17y^2 - 15y + 5,$$
. . . .

De même, en désignant par q_{2i+1} le quotient de S_{2i+1} par S_3, on a

$$q_5 = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3},$$
$$q_7 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3},$$
$$q_9 = \frac{2}{5}y^3 - y^2 + \frac{6}{5}y - \frac{3}{5}.$$

Enfin nous nous permettrons de faire observer que la formule (X) de la page 518 a été donnée par Jacobi (*Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, Altona, 1863, p. 299) et que l'on déduit aisément d'autres formules analogues (*Recherches d'Analyse indéterminée*, p. 84).

NOTE RELATIVE AUX INTERSECTIONS INTÉRIEURES DES DIAGONALES D'UN POLYGONE CONVEXE;

PAR M. LIONNET.

THÉORÈME. — *Le nombre i_n des intersections intérieures des diagonales d'un polygone convexe de n côtés est égal au nombre c_n^4 des combinaisons de ses n sommets quatre à quatre.*

Dans un polygone convexe de n côtés, quatre sommets, pris comme on voudra, sont les sommets d'un quadrilatère convexe où les diagonales, qui sont deux diagonales du polygone proposé, se coupent à l'intérieur du quadrilatère et, par suite, à l'intérieur du polygone.

Réciproquement, si deux diagonales du polygone proposé s'y coupent intérieurement, leurs extrémités sont quatre sommets du polygone; donc $i_n = c_n^4$.

Remarque I. — L'énoncé du théorème précédent, plus exact que celui déjà publié deux fois dans les *Nouvelles Annales* (années 1848 et 1880, p. 91 et 44), diffère de celui-ci en ce que l'expression *points d'intersection* y est remplacée par le mot *intersections*. La raison en est que, si plus de deux diagonales se coupent en un même point intérieur au polygone, plusieurs intersections intérieures de deux diagonales correspondent à ce seul point d'intersection. Ainsi, par exemple, dans l'hexagone régulier, où la formule $i_n = c_n^4$ donne 15 pour le nombre des intersections intérieures des diagonales, on trouve seulement treize points intérieurs d'intersection, ce qui tient à ce que trois des neuf diagonales se coupent au centre du polygone.

Remarque II. — Les auteurs qui ont donné précédem-

ment la démonstration de la formule $i_n = c_n^4$ ont cru devoir calculer d'abord le rapport de i_n à i_{n-1} ou la différence $i_n - i_{n-1}$; mais il m'a semblé beaucoup plus simple d'en donner une démonstration directe.

Note du Rédacteur. — M. le professeur de Virieu remarque de même que ce théorème, dont on a donné des démonstrations dans les *Nouvelles Annales* (années 1848 et 1880, p. 91 et 44), cesse d'être rigoureusement exact lorsque trois ou plus de trois diagonales du polygone considéré se coupent en un même point intérieur.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Œuvres complètes de Laplace, publiées, sous les auspices de l'Académie des Sciences, par MM. les Secrétaires perpétuels. *Tome quatrième*; Paris, Gauthier-Villars (1880).

2. Cours de Calcul infinitésimal, par *J. Hoüel*, professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. *Tome troisième*; Paris, Gauthier-Villars (1880). — *Second fascicule.*

3. Sur l'origine de quelques notations mathématiques; par M. *C. Henry*. Extrait de la *Revue archéologique*. Paris, Didier et Cie (1880).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1296

(voir 2e série, t. XVII, p. 526);

PAR M. SONDAT.

Si les égalités

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 = 0, \quad A\alpha'^3 + B\beta'^3 + C\gamma'^3 = 0$$

représentent deux solutions connues et distinctes de l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 0,$$

une troisième solution sera donnée par les formules

$$\begin{aligned} x &= B\beta\beta'(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + C\gamma\gamma'(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma),\\ y &= C\gamma\gamma'(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + A\alpha\alpha'(\beta\alpha' - \beta'\alpha),\\ z &= A\alpha\alpha'(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + B\beta\beta'(\gamma\beta' - \gamma'\beta).\end{aligned}$$

(REALIS.)

Des deux égalités admises on tire

$$(1) \qquad \frac{A}{\beta^3\gamma'^3 - \beta'^3\gamma^3} = \frac{B}{\gamma^3\alpha'^3 - \gamma'^3\alpha^3} = \frac{C}{\alpha^3\beta'^3 - \alpha'^3\beta^3} = \lambda,$$

et si, pour abréger, on pose

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = P, \quad \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = Q, \quad \beta\gamma' - \beta'\gamma = R,$$

on aura

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \lambda PQR(\alpha^2\beta'\gamma' - \alpha'^2\beta\gamma),\\ y &= \lambda PQR(\beta^2\alpha'\gamma' - \beta'^2\alpha\gamma),\\ z &= \lambda PQR(\gamma^2\alpha'\beta' - \gamma'^2\alpha\beta).\end{aligned}\right.$$

Remplaçant dans l'équation proposée A, B, C par les valeurs (1) et x, y, z par les valeurs (2), il vient l'identité

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(\beta^3\gamma'^3-\beta'^3\gamma^3)(\alpha^2\beta'\gamma'-\alpha'^2\beta\gamma)^3\\ &\quad+(\gamma^3\alpha'^3-\gamma'^3\alpha^3)(\beta^2\alpha'\gamma'-\beta'^2\alpha\gamma)^3\\ &\quad+(\alpha^3\beta'^3-\alpha'^3\beta^3)(\gamma^2\alpha'\beta'-\gamma'^2\alpha\beta)^3=0,\end{aligned}\right.$$

qu'on peut établir en développant.

La proposition est ainsi établie.

Question 1312

(voir 2e série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. MARCELLO ROCHETTI,
Professeur au lycée royal Campanella, à Reggio (Calabria).

Transformer le produit

$$3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2[(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3]$$

en une somme de trois cubes. (S. REALIS.)

Le produit précédent peut s'écrire ainsi,

$$\begin{aligned}&=3(\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+2\alpha^3\beta^3+2\alpha^3\gamma^3+2\beta^3\gamma^3)\\ &\quad\times(2\alpha^3+2\beta^3+2\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2),\end{aligned}$$

et, si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$\Sigma\alpha^9=\alpha^9+\beta^9+\gamma^9,$$
$$\Sigma\alpha^8\beta=\alpha^8\beta+\alpha\beta^8+\alpha^8\gamma+\alpha\gamma^8+\beta^8\gamma+\beta\gamma^8,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

il est visible qu'on peut mettre P sous la forme suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} P&=6\Sigma\alpha^9+9\Sigma\alpha^8\beta+9\Sigma\alpha^7\beta^2+18\Sigma\alpha^6\beta^3+18\Sigma\alpha^5\beta^4\\ &\quad+9\Sigma\alpha^6\beta^2\gamma+18\Sigma\alpha^5\beta^3\gamma+18\Sigma\alpha^4\beta^3\gamma^2+36\alpha^3\beta^3\gamma^3.\end{aligned}\right.$$

Or, le développement de la somme des trois cubes

$$\begin{aligned}(2\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3 + 3\alpha\beta^2 + 3\alpha\gamma^2)^3 \\ + (2\beta^3 - \gamma^3 - \alpha^3 + 3\beta\alpha^2 + 3\beta\gamma^2)^3 \\ + (2\gamma^3 - \alpha^3 - \beta^3 + 3\gamma\alpha^2 + 3\gamma\beta^2)^3\end{aligned}$$

donne tous les termes de l'expression (1), et ces termes seulement, parce que les autres disparaissent par la réduction des termes semblables; donc P a été transformé en la somme de trois cubes.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1320

(voir 2e série, t. XVIII, p. 383);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Soit une série de cercles concentriques. Dans chacun d'eux on trace un rayon OM *qui détache un secteur* AOM *d'aire donnée à partir d'une droite fixe* AOX *passant par le centre* O : *trouver le lieu du point* M.

(LAISANT.)

Prenons pour pôle le centre O et pour axe polaire la droite OX; en désignant par m^2 l'aire donnée, et par r et θ les coordonnées du point M, nous aurons

$$\frac{\pi r^2 \theta}{360} = m^2$$

ou, en posant $\frac{360 m^2}{\pi} = a^2$,

$$\theta r^2 = a^2. \tag{1}$$

Telle est l'équation de la courbe lieu du point M.

Cette courbe, cas particulier des spirales dont l'équa-

tion est $r = a\theta^n$, a été désignée par Cotes sous le nom de *lituus* (*Harmonia mensurarum*).

Note. — Solutions analogues de MM. Moret-Blanc; Leinekugel; J.-B. Buvat, du lycée de Moulins; Habbé.

Question 1324

(voir 2e série, t. XVIII, p. 384);

PAR M. MORET-BLANC.

Si (x, y, z) est une solution en nombres entiers de l'équation

$$aX^4 + bY^4 + dX^2Y^2 = cZ^2,$$

on aura une solution en nombres entiers (x_1, y_1, z_1) de l'équation

$$X^4 + abc^2Y^4 + cdX^2Y^2 = Z^2$$

par les formules

$$x_1 = ax^4 - by^4, \quad y_1 = 2xyz, \quad z_1 = c^2z^4 + (4ab - d^2)x^4y^4.$$

Les formules de Lebesgue sont la conséquence évidente des précédentes. (A. DESBOVES.)

L'équation $x_1^4 + abc^2y_1^4 + cdx_1^2y_1^2 = z_1^2$ devient, en remplaçant x_1, y_1, z_1 par les valeurs précédentes,

$$(ax^4 - by^4)^4 + 16abc^2x^4y^4z^4 + 4cdx^2y^2z^2(ax^4 - by^4)^2$$
$$= [c^2z^4 + (4ab - d^2)x^4y^4]^2,$$

ou, en ayant égard à la relation $cz^2 = ax^4 + by^4 + dx^2y^2$,

$$(ax^4 - by^4)^4 + 16abx^4y^4(ax^4 + by^4 + dx^2y^2)^2$$
$$+ 4dx^2y^2(ax^4 - by^4)(ax^4 + by^4 + dx^2y^2)$$
$$= [(ax^4 + by^4)^2 + 2dx^2y^2(ax^4 + by^4) + 4abx^4y^4]^2.$$

Développant et passant tous les termes dans le second

membre, il vient

$$
\begin{aligned}
&(ax^4+by^4)^4+4dx^2y^2(ax^4+by^4)^3\\
&\quad-(ax^4-by^4)^4-4dx^2y^2(ax^4-by^4)^2(ax^4+by^4)\\
&\quad+4d^2x^4y^4(ax^4+by^4)^2+8abx^4y^4(ax^4+by^4)^2\\
&\quad-4d^2x^4y^4(ax^4-by^4)^2-16abx^4y^4(ax^4+by^4)^2\\
&\quad+16abdx^6y^6(ax^4+by^4)+16a^2b^2x^8y^8\\
&\qquad\qquad-32abdx^6y^6(ax^4+by^4)-16abd^2x^8y^8=0
\end{aligned}
$$

ou $0=0$, ce qui est une identité. Le théorème est donc démontré (1).

On a les formules de Lebesgue (*voir* 2e série, t. XI, p. 83) en faisant $a=c=1$.

Question 1326

(voir 2e série, t. XVIII, p. 432);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver dans l'intérieur d'un triangle ABC *un point tel qu'en abaissant de ce point des perpendiculaires sur les côtés on divise le triangle en trois quadrilatères proportionnels à* m, n, p. (LEZ.)

Soient x et y les coordonnées du point cherché M, rapportées aux côtés AB, AC du triangle pris pour axes; MD, ME, MF les perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés BC, AC, AB.

Le double de l'aire du quadrilatère AEMF sera

$$
\begin{aligned}
&(x+y\cos A)y\sin A+(y+x\cos A)x\sin A\\
&\qquad=\frac{m}{m+n+p}bc\sin A.
\end{aligned}
$$

---

(1) Il ne serait pas sans intérêt de savoir par quelles déductions on est conduit à ce théorème; le calcul qui le vérifie n'indique rien de précis à cet égard.

On aura donc, en divisant par sin A,

$$(x^2+y^2)\cos A + 2xy = \frac{mbc}{m+n+p}.$$

Cette équation représente une hyperbole ayant son centre au point A et pour axe transverse la bissectrice de l'angle A. On a pour les coordonnées des sommets

$$y^2 = x^2 = \frac{1}{4\cos^2\frac{A}{2}} \times \frac{mbc}{m+n+p}$$

et pour longueur du demi-axe transverse

$$2x\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{mbc}{m+n+p}}.$$

L'équation des asymptotes est

$$(x^2+y^2)\cos A + 2xy = 0.$$

Leurs coefficients angulaires sont

$$\frac{-1 \pm \sin A}{\cos A} = -\left(\frac{1 \mp \sin A}{\cos A}\right).$$

Soit CH la hauteur du triangle abaissée du sommet C. Prenons sur CA et sur son prolongement CI = CK = CH; les parallèles menées du point A aux droites IH et KH seront les asymptotes ([1]).

Connaissant les asymptotes et un sommet, il est facile de construire l'hyperbole, qu'on réduira à la portion de branche comprise dans l'intérieur du triangle.

On voit de même que le point M devra se trouver sur

([1]) L'hyperbole que l'équation $(x^2+y^2)\cos A + 2xy = \frac{mbc}{m+n+p}$ représente, étant équilatère, a pour asymptotes les bissectrices des deux angles droits formés par les deux axes de la courbe, dont les directions sont connues. (G.)

une seconde hyperbole dont l'équation, rapportée aux axes BA, BC, est

$$(x^2+y^2)\cos B + 2xy = \frac{nac}{m+n+p},$$

et que l'on construira comme la première.

L'intersection des deux hyperboles donnera le point M.

Si elles ne se coupent pas dans l'intérieur du triangle, le problème n'aura pas de solution.

On voit par la disposition des deux hyperboles que le problème, quand il sera possible, n'aura qu'une seule solution.

Note. — La même question a été résolue par M. Ferdinando Pisani.

Question 1327

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 432);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne les bissectrices α, β *des deux angles aigus* A, B *d'un triangle rectangle* ABC : *calculer les valeurs des côtés et des angles* A, B *du triangle.* (*Discussion et nombre des solutions.*)

Les bissectrices étant supposées intérieures, on a

$$a = \beta\cos\frac{B}{2},\quad b = \alpha\cos\frac{A}{2},$$

d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\beta\cos\frac{B}{2}}{\alpha\cos\frac{A}{2}},$$

et par suite

$$\alpha\sin A\cos\frac{A}{2} = \beta\cos A\cos\frac{B}{2}.$$

Il en résulte

$$2\alpha \sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \beta\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B}{2},$$

et, parce que

$$\cos\frac{B}{2} = \cos\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right),$$

$$2\alpha \sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\beta\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right),$$

$$2\sqrt{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \cos^3\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} - \sin^3\frac{A}{2}.$$

Divisant les deux membres par $\cos^3\frac{A}{2}$, et posant $\tang\frac{A}{2} = x$, on a l'équation

$$(1) \qquad x^3 + x^2 + \left(2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)x - 1 = 0,$$

qui n'a qu'une seule racine positive comprise entre 0 et 1 [1].

---

[1] Ses deux autres racines sont imaginaires, car, en changeant x en $-x$, l'équation devient

$$x^3 - x^2 + \left(2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)x + 1 = 0$$

ou

$$x^3 - x^2 - x + 1 + 2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta}x = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(x+1)(x-1)^2 + 2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta}x = 0.$$

Or, il est évident que le premier membre de cette dernière équation est constamment positif pour toute valeur positive de x; donc l'équation proposée

$$(1) \qquad x^3 + x^2 + \left(2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)x - 1 = 0$$

n'admet aucune racine négative, et, par conséquent, elle a deux racines imaginaires. (G.)

Cette racine fait connaître l'angle $\frac{A}{2}$ au moyen de sa tangente, et par suite les angles A, B. On obtient les valeurs des côtés a, b par les formules $a = \beta \cos\frac{B}{2}$, $b = \alpha \cos\frac{A}{2}$; puis on a

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad c = \frac{a}{\sin A}.$$

Le problème est toujours possible et n'admet qu'une seule solution.

Si α, β représentaient les valeurs des bissectrices extérieures des angles A, B, on aurait

$$a = \beta \sin\frac{B}{2}, \quad b = \alpha \sin\frac{A}{2},$$

d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Il s'ensuit

$$2\alpha \cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \beta \cos A \sin\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right),$$

$$2\alpha \cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\beta\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right),$$

$$2\sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\beta}\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \cos^3\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} + \sin^3\frac{A}{2}.$$

En divisant par $\cos^3\frac{A}{2}$, et posant $\tang\frac{A}{2} = x$, il vient

$$(2) \qquad x^3 - \left(2\sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)x^2 - x + 1 = 0.$$

Cette équation a deux racines positives, l'une comprise

entre o et 1, et l'autre plus grande que 1 ; la première seule est admissible (¹).

Le problème a encore une solution et n'en a qu'une seule.

On verrait de la même manière qu'il en serait encore de même si l'on donnait une bissectrice intérieure et une bissectrice extérieure.

Note. — La question a aussi été résolue par MM. Ferdinando Pisani; A. Leinekugel, étudiant en Mathématiques.

Question 1329

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 477);

Par M. V.-M. ARNAUD,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

Soit la série récurrente

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots,$$

telle que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$: *trouver la somme des n premiers termes de la série*

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.5} + \frac{5}{3.8} + \ldots + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}u_{n+3}}.$$

(E. Lucas.)

De l'égalité

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

on tire

$$u_{n+1} = u_{n+2} - u_n,$$

(¹) La racine négative de cette équation, changée de signe, est la valeur de $\tang\frac{A}{2}$, lorsque α représente la bissectrice extérieure de l'angle A et β la bissectrice intérieure de l'angle B. (G.)

et la série peut s'écrire

$$(1)\quad \frac{2-1}{1.2}+\frac{3-1}{1.3}+\frac{5-2}{2.5}+\frac{8-3}{3.8}+\ldots+\frac{u_{n+3}-u_{n+1}}{u_{n+1}u_{n+3}}$$

ou

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\ldots \\ \quad +\left(\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n+3}}\right). \end{cases}$$

Or, d'après la forme des dénominateurs, on voit que le premier terme de chaque parenthèse est détruit par le second terme de la parenthèse antéprécédente. Dans la série (2), les seuls termes qui ne se détruisent pas sont donc les premiers des deux premières parenthèses et les derniers des deux dernières.

On a donc

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{u_{n+2}}-\frac{1}{u_{n+3}}$$
$$=2-\left(\frac{1}{u_{n+2}}+\frac{1}{u_{n+3}}\right)=2-\frac{u_{n+4}}{u_{n+2}u_{n+3}}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Wokram, à Saint-Pétersbourg; J. de Virieu, professeur à Lyon; H.-J. Krantz; Moret-Blanc; Artemieff, à Saint-Pétersbourg; E. Fauquembergue; A. Leinekugel; Lebreton; H. Letellier, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée de Tarbes (classe de M. Escary).

Question 1332

(voir 2e série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. ROBAGLIA.

Une droite SA *pivote autour du sommet* S *d'une parabole qu'elle rencontre en* A, *et de ce point* A *on abaisse une perpendiculaire* AP *sur la tangente au sommet :*

1° *On joint le point* P *au pied* D *de la directrice par une droite qui rencontre* AS *en* M ;

2° *On joint le point* P *au foyer* F *par une droite qui rencontre* AS *en* N ;

3° *On abaisse de* P *sur* AS *une perpendiculaire qui coupe* AS *au point* Q, *et l'on prolonge* PQ *d'une quantité égale* QR.

Démontrer que le point M *décrit une hyperbole, le point* N *une ellipse, le point* Q *un cercle, et le point* R *une strophoïde* [1].

(Ed. Guillet.)

1. Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole et $y = mx$ l'équation de la droite SA. On a, pour l'ordonnée du point A,

$$y = \mathrm{SP} = \frac{2p}{m},$$

et, par suite, pour les coefficients angulaires m', m'' des droites PD, PF,

$$m' = \frac{4}{m}, \quad m'' = -\frac{4}{m},$$

d'où

$$mm' = 4, \quad mm'' = -4.$$

Il s'ensuit que le lieu du point M est une hyperbole ayant ses sommets aux points D, S, et que le lieu du point N est une ellipse dont le petit axe est SF et le grand axe 2SF [2].

2. Soit T le point de rencontre des droites PQ, SF;

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

(2) L'équation du lieu du point M est

$$y^2 - 4x^2 - 2px = 0,$$

et le lieu du point N est représenté par l'équation

$$y^2 + 4x^2 - 2px = 0.$$

(*Note du Rédacteur.*)

les triangles rectangles semblables PST, PSA donnent

$$\frac{ST}{SP} = \frac{SP}{AP}, \quad ST = \frac{SP^2}{AP} = 4SF.$$

Il en résulte que le lieu du point Q est le cercle décrit sur ST = 4SF comme diamètre.

3. En nommant C le point de rencontre de la droite SR et de la perpendiculaire à ST en T, il est facile de voir, à cause de SR = SP, que CR = CT. Donc le lieu géométrique du point R est une strophoïde, ayant son point de rebroussement en T et son sommet en S.

Note. — Autres solutions de MM. Lez; Moret-Blanc; Édouard Lery, agent voyer cantonal; Droz; Ferdinando Pisani; E. Fauquembergue; A. Leinekugel, étudiant en Mathématiques; Samson Dreyfus, étudiant à la Faculté des Sciences de Nancy; Paul Payssé, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Bordeaux; Ambert, du Lycée de Montpellier; Georges Galiesto, à Bordeaux; Basset, à Moulins; Lambiotte, élève de l'École polytechnique de Bruxelles; Lebreton; L. Julliard, du Lycée Corneille (Rouen).

Question 1334

(voir 2e série, t. XVIII, p. 479);

PAR M. A. DROZ,

Maître de Mathématiques à l'Institution Briedenstein, à Granges.

Un quadrilatère est circonscrit à un cercle dont le rayon est r *et ses sommets sont sur un autre cercle dont le rayon est* R; *si* D *représente la distance des centres des cercles, démontrer que le rectangle des diagonales du quadrilatère est égal à* $\frac{8R^2r^2}{R^2 - D^2}$.

(G. LEUDESDORF, M. A.)

Menons les bissectrices BE, DF des deux angles opposés ABC, ADC du quadrilatère ABCD (1); ces droites

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

se coupent au centre O du cercle inscrit, et elles rencontrent la circonférence circonscrite en des points E, F, extrémités d'un diamètre EF de cette circonférence.

Soient G et H les points auxquels le cercle inscrit O est tangent aux côtés BC, CD du quadrilatère.

Les triangles rectangles OBG, ODH donnent

$$\sin\frac{1}{2}\text{ABC} = \frac{\text{OG}}{\text{OB}} = \frac{r}{\text{OB}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{1}{2}\text{ADC} = \frac{\text{OH}}{\text{OD}} = \frac{r}{\text{OD}},$$

d'où

$$2\sin\frac{1}{2}\text{ABC}\sin\frac{1}{2}\text{ADC}$$
$$= 2\sin\frac{1}{2}\text{ABC}\cos\frac{1}{2}\text{ABC} = \frac{2r^2}{\text{OB}.\text{OD}};$$

donc

$$\sin\text{ABC} = \frac{2r^2}{\text{OB}.\text{OD}}.$$

Mais, dans le triangle ABC, on a

$$\text{AC} = 2\text{R}\sin\text{ABC};$$

par conséquent, la diagonale $\text{AC} = \frac{4\text{R}r^2}{\text{OB}.\text{OD}}$.

Dans le triangle DFB, on a

$$\text{BD} = 2\text{R}.\sin\text{DFB} = 2\text{R}.\sin\text{OFB};$$

mais l'angle OBF = EBF est droit; puisque EF est un diamètre du cercle R, le triangle OBF étant rectangle en B,

$$\sin\text{OFB} = \frac{\text{OB}}{\text{OF}};$$

donc

$$\text{BD} = 2\text{R}\frac{\text{OB}}{\text{OF}}.$$

Ainsi le produit des deux diagonales $\text{AC} \times \text{BD} = \frac{8\text{R}^2r^2}{\text{OD}.\text{OF}}$.

Or, le produit OD.OF représente la puissance du point O par rapport au cercle dont le rayon est R; on a

donc

$$OD.OF = R^2 - D^2;$$

il s'ensuit

$$AC.BD = \frac{8R^2r^2}{R^2 - D^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Lez, Ferdinando Pisani.

Question 1339

(voir 2e série, t. XVIII, p. 528);

PAR M. J. LISSENÇON,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Trouver un nombre qui soit, ainsi que son bicarré, la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

(LIONNET.)

Un nombre N égal à la somme de deux carrés peut être représenté par $a^2 + b^2$, et, en introduisant les imaginaires,

$$N = a^2 + b^2 = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1});$$

son bicarré

$$N^4 = (a^2 + b^2)^4 = (a + b\sqrt{-1})^4(a - b\sqrt{-1})^4,$$

et

$$N^4 = A^2 + B^2,$$

en posant

$$(a + b\sqrt{-1})^4 = A + B\sqrt{-1},$$
$$(a - b\sqrt{-1})^4 = A - B\sqrt{-1}.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$(1) \qquad A = a^4 - 6a^2b^2 + b^4,$$
$$(2) \qquad B = 4a^3b - 4ab^3.$$

D'après les conditions du problème, a et b doivent être deux nombres entiers consécutifs, ce qui permet de

remplacer b par $a+1$, dans les relations (1) et (2), qui deviennent, par cette substitution,

$$(3) \qquad A = -4a^4 - 8a^3 + 4a + 1,$$

$$(4) \qquad B = -8a^3 - 12a^2 - 4a.$$

Pour que A, B soient, comme a, b, deux nombres entiers consécutifs, il suffit qu'on ait $A - B = 1$.

Si, dans l'égalité $A - B = 1$, on remplace A et B par les valeurs (3) et (4), il vient

$$4a^4 - 12a^2 - 8a = 0,$$

équation dont les racines sont $a = 0$, $a = 2$, $a = -1$.

La valeur $a = 2$ convient seule à la question.

Il en résulte

$$b = 3, \quad A = -119, \quad B = -120,$$
$$a^2 = 4, \quad b^2 = 9, \quad N = a^2 + b^2 = 13,$$
$$N^4 = A^2 + B^2 = 119^2 + 120^2 = 28561 = 13^4.$$

Le nombre 13 satisfait donc à la question proposée.

Note. — Autres solutions de MM. Moret-Blanc et Leinekugel.

Question 1340

(voir 2e série, t. XVIII, p. 528)

PAR M. J.-M. FAURÉ,
Élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Tarbes.

Si a, b, c sont les côtés rangés par ordre de grandeurs décroissantes d'un triangle ABC, *et* S *la surface de ce triangle :*

1° *L'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des trois bissectrices intérieures a pour expression*

$$\frac{2abcS}{(b+c)(a+c)(a+b)};$$

2° *L'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des deux bissectrices extérieures issues des sommets* B, C, *et de la bissectrice intérieure issue du sommet* A, *a pour expression*

$$\frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)}.$$

(Dostor.)

1° Soient AA', BB', CC' les bissectrices intérieures et S' l'aire du triangle A'B'C' (¹). On a

$$(1) \qquad S' = S - CA'B' - BA'C' - AB'C'.$$

Les propriétés connues des bissectrices donnent

$$AB' = \frac{bc}{a+c}, \quad AC' = \frac{bc}{a+b}, \quad BA' = \frac{ac}{b+c},$$

$$CA' = \frac{ab}{b+c}, \quad CB' = \frac{ab}{a+c}, \quad BC' = \frac{ac}{a+b}.$$

D'autre part, les triangles CA'B', CAB, ayant un angle commun C, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle, d'où

$$CA'B' = \frac{abS}{(a+c)(b+c)}.$$

On a de même

$$BA'C' = \frac{acS}{(a+b)(c+b)}, \quad AB'C' = \frac{bcS}{(a+b)(a+c)}.$$

En remplaçant les aires CA'B', BA'C', AB'C' par leurs valeurs dans l'égalité (1), on trouve, toute réduction effectuée,

$$S' = \frac{2abcS}{(b+c)(a+c)(a+b)}.$$

2° Soient BB_1, CC_1 les bissectrices extérieures des

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Quelle est la propriété analogue relativement à une surface du second ordre? (LAGUERRE.)

I. Pour plus de netteté, je démontrerai à part le lemme suivant :

Lorsque, dans le plan d'un triangle ABC, *on a un point* P *tel que les droites joignant les sommets* A, B, C *du triangle aux projections* D, E, F *du point* P *sur les côtés* BC, CA, AB *se coupent en un même point, le point* P *jouit de la même propriété par rapport au triangle* DEF.

C'est-à-dire qu'en désignant par H, I, G les projections de P sur les côtés EF, FD, DE du triangle DEF, les droites DH, EI, FG se couperont en un même point [1].

Pour le démontrer, il faut établir l'égalité

$$(1)\qquad \frac{GD}{GE}\times\frac{HE}{HF}\times\frac{IF}{ID}=-1.$$

Or, en vertu de notre hypothèse, nous avons d'abord la relation

$$(2)\qquad \frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=-1.$$

Le quadrilatère PDEC étant inscriptible, l'angle PDG = PCE; donc les triangles rectangles PDG, PEC sont semblables, et leur similitude donne

$$\frac{GD}{GP}=\frac{EC}{PE}.$$

De même, les triangles rectangles PGE, PDC étant semblables, on a

$$\frac{GE}{GP}=\frac{DC}{PD},$$

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où, en divisant membre à membre,

$$(3) \qquad \frac{GD}{GE} = \frac{EC \times PD}{DC \times PE}.$$

On aura de même ces deux autres relations analogues

$$(4) \qquad \frac{HE}{HF} = \frac{FA \times PE}{EA \times PF},$$

$$(5) \qquad \frac{IF}{ID} = \frac{DB \times PF}{FB \times PD}.$$

Multipliant membre à membre les relations (3), (4), (5), il vient

$$\frac{GD}{GE} \times \frac{HE}{HF} \times \frac{IF}{ID} = \frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB}$$

ou, à cause de la relation (2),

$$\frac{GD}{GE} \times \frac{HE}{HF} \times \frac{IF}{ID} = -1,$$

égalité qui démontre le lemme énoncé.

Le corollaire suivant s'en déduit immédiatement, d'après une proposition connue de la théorie des transversales :

Corollaire. — Les conjugués harmoniques des points G, H, I, pris respectivement par rapport à (D, E), (E, F), (F, D), sont en ligne droite.

Cela posé, il sera facile d'établir la proposition 1341.

Car, en considérant les points D, E, F comme les pieds de trois normales menées du point P à une conique, les côtés BC, AC, AB du triangle ABC seront des tangentes à la conique en D, E, F, et l'on sait que les droites AD, BE, CF se couperont en un même point. Donc, en vertu de notre lemme, ou plutôt de son corollaire, les conjugués harmoniques de G, H, I relativement à (D, E), (E, F), (F, D) sont en ligne droite.

On a ainsi quatre droites qui contiennent chacune trois des six points β_{ij}; par conséquent, les six points β_{ij} forment les sommets d'un quadrilatère complet.

II. *Quelle est la propriété analogue relativement à une surface du second ordre?*

Voici comment on pourrait l'énoncer :

Par un point donné P *on mène les six normales à une surface du second ordre; soient* D, E *les pieds de deux de ces normales,* G *le point de rencontre de la droite* DE *et du plan perpendiculaire à cette droite mené par le point* P, K *le conjugué harmonique de* G *par rapport aux points* D, E : *les quinze points* K *ainsi déterminés sont trois à trois en ligne droite.*

En effet, par les pieds D, E, F de trois de ces normales faisons passer un plan qui coupe la surface suivant une conique. Soit p la projection de P sur ce plan; les droites pD, pE, pF seront normales à la conique DEF, car la droite PD de l'espace, perpendiculaire au plan tangent en D à la surface, est perpendiculaire à la tangente DT menée à la conique au point D; donc, d'après le théorème des trois perpendiculaires, la droite pD est perpendiculaire à la tangente DT: c'est dire qu'elle est normale à la conique. Il en est évidemment de même des droites pE, pF. De là résulte que les trois points K correspondant aux trois normales PD, PE, PF sont en ligne droite. Par conséquent, les quinze points K sont trois à trois en ligne droite.

Par chacun de ces points K passent quatre droites du système ([1]).

([1]) Le nombre de ces droites est de vingt; chacune d'elles contient trois des quinze points K : donc, par l'un quelconque de ces points passent nécessairement quatre droites du système.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani et Dufaur, élève en Mathématiques spéciales, à Bordeaux.

Question 1342

(voir 2ᵉ série, t. XIX, p. 144);

PAR M. DUFAUR,

Élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Bordeaux.

D'un point donné M *on mène deux droites normales à une parabole; soient* a, b *leurs pieds*, α *le pied de la perpendiculaire abaissée du point* M *sur la corde* ab, *et* β *le conjugué harmonique de* α *relativement aux points* a *et* b : *démontrer que le point* β *est sur la droite menée par* M, *perpendiculairement à l'axe de la parabole.* (LAGUERRE.)

Menons aux points a, b des perpendiculaires aP, bP aux normales Ma, Mb; les droites aP, bP seront tangentes à la parabole, et, en joignant leur point de rencontre P au milieu i de la corde des contacts ab, la droite Pi sera parallèle à l'axe de la parabole.

Si par le point P on mène une parallèle PN à la corde ab, les quatre droites Pa, Pb, Pi, PN formeront un faisceau harmonique, puisque le point i est le milieu de ab.

Les trois rayons Pa, Pb, PN de ce faisceau sont respectivement perpendiculaires aux trois rayons Ma, Mb, Mα du faisceau harmonique M(a, b, α, β); donc les quatrièmes rayons Pi, Mβ des deux faisceaux sont perpendiculaires entre eux. Par conséquent, le point β est sur la droite menée par M perpendiculairement à l'axe de la parabole.

Note. — La même proposition a été démontrée par MM. Ferdinando Pisani; A. Tissier, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Rouen, Ed. Bresson, élève en Mathématiques spéciales au Prytanée militaire, à la Flèche.

point M du plan et par les points de contact des gentes menées de ce point à la parabole;

2° De trouver le lieu des points M pour lesque cercle a un rayon constant;

3° De trouver le lieu du centre de ce cercle de r constant;

4° De démontrer que la polaire du point M par port à la parabole et la seconde corde d'intersectio cercle et de la parabole se coupent sur une droite d minée. (BARBARIN.

1349. Trouver un nombre positif ayant la double priété d'être égal au produit de trois entiers consé et à celui de deux entiers consécutifs. (LIONNE

1350. Trouver un nombre positif ayant la triple priété d'être, ainsi que sa moitié, égal au produit de entiers consécutifs, le plus petit des deux facteu cette moitié étant lui-même égal au produit de deu tiers consécutifs. (LIONNET.

1351. Deux circonférences et un point A étant do mener par ce point une sécante telle que la diffé des cordes interceptées soit égale à d.

Indiquer les cas d'impossibilité suivant la pos

RECHERCHES SUR DEUX MODES DE TRANSFORMATION DES FIGURES SOLIDES;

PAR M. E. AMIGUES,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

[SUITE ET FIN (1).]

THÉORÈME X. — *Inversement, dans tout système de transformation où les plans correspondants divisent les arêtes de même nom de deux tétraèdres dans des rapports réciproques, les plans de l'infini se correspondent.*

Par hypothèse on a

$$\frac{BM}{AM} \times \frac{B'M'}{A'M'} = +1.$$

Or, pour le plan de l'infini de la figure ABC, on a

$$\frac{BM}{AM} = -1.$$

On doit donc conclure que

$$\frac{B'M'}{A'M'} = -1.$$

Donc le plan de l'infini a pour correspondant le plan de l'infini

18. THÉORÈME XI. — *Dans une quartique de Steiner, considérons un des quatre plans tangents doubles et le plan tangent qui lui est parallèle, puis menons entre les*

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 433.

deux un troisième plan qui leur soit parallèle et dont la distance au second soit double de la distance au premier. Ce troisième plan, et les trois plans qui lui sont analogues, se coupent en un même point.

Dans la figure ABCD, prenons un point quelconque défini par les équations

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} = \frac{T}{d}.$$

Tout plan passant par ce point a pour équation

$$(dX - aT) + m(dY - bT) + n(dZ - cT) = 0,$$

ou bien

$$dX + mdY + ndZ - (a + bm + cn)T = 0.$$

Le plan correspondant de l'autre figure a pour équation

$$(28) \quad \frac{X'}{\lambda d} + \frac{Y'}{\mu md} + \frac{Z'}{\nu nd} + \frac{T'}{-\rho(a + bm + cn)} = 0.$$

Lorsque m et n varient, ce plan enveloppe une quartique de Steiner doublement tangente aux quatre faces du tétraèdre A'B'C'D'.

Cherchons le plan tangent simple qui est parallèle à la face A'B'C'. Pour cela, identifions l'équation (28) avec l'équation générale des plans parallèles à la face A'B'C', c'est-à-dire avec l'équation

$$(29) \qquad A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' + KT' = 0;$$

on a ainsi :

$$\lambda dA' = \mu mdB' = \nu ndC' = -\rho(a + bm + cn)(D' + K).$$

On tire de là

$$m = \frac{\lambda A'}{\mu B'} \quad \text{et} \quad n = \frac{\lambda A'}{\nu C'},$$

et, par suite,

$$D' + K = \frac{-\lambda d A'}{\rho\left(a + \frac{b\lambda A'}{\mu B'} + \frac{c\lambda A'}{\nu C'}\right)},$$

$$D' + K = \frac{-d}{\rho\left(\frac{a}{\lambda A'} + \frac{b}{\lambda B'} + \frac{c}{\lambda C'}\right)}.$$

L'équation (29) devient ainsi

$$A'X' + B'Y' + C'Z' - \frac{dT'}{\rho\left(\frac{a}{\lambda A'} + \frac{b}{\mu B'} + \frac{c}{\nu C'}\right)} = 0,$$

et elle représente le plan tangent simple parallèle à la face A'B'C'.

On a, d'ailleurs, la relation générale

$$A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' = 3V',$$

V' étant le volume du tétraèdre A'B'C'D'.

Retranchant membre à membre les deux dernières équations, on a

$$D'T' = 3V' \frac{\left(\frac{a}{\lambda A'} + \frac{b}{\mu B'} + \frac{c}{\nu C'}\right)}{\sum \frac{a}{\lambda A'}},$$

ou bien, en remplaçant a, b, c, d par les quantités proportionnelles X, Y, Z, T,

$$D'T' = 3V' \frac{\frac{X}{\lambda A'} + \frac{X}{\mu B'} + \frac{Z}{\nu C'}}{\sum \frac{X}{\lambda A'}}.$$

Telle est la distance T' du plan tangent simple parallèle à la face A'B'C' au plan même de cette face, dans la quartique de Steiner qui correspond au point (X, Y, Z, T).

Pour le plan de notre énoncé, la valeur de T' est trois fois plus faible et l'on a

$$(30) \qquad D'T' = V' \frac{\frac{X}{\lambda A'} + \frac{Y}{\mu B'} + \frac{Z}{\nu C'}}{\sum \frac{X}{\lambda A'}}.$$

On aura de même les distances X', Y', Z' pour les trois plans analogues.

Pour que ces quatre plans se coupent en un même point, il faut et il suffit que l'on ait

$$A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' = 3V'.$$

Or, il est évident que la valeur de T' et les trois valeurs analogues satisfont à cette condition.

Le point d'intersection des quatre plans considérés a des propriétés remarquables. Nous l'appellerons *point central* de la quartique, parce qu'à certains égards il joue le rôle du centre dans les coniques.

19. Quand le point (X, Y, Z, T) se déplace, la quartique de Steiner se déforme et son point central (X', Y', Z', T') est variable. Or, d'après la formule (30) et les analogues, il est visible que les points (X, Y, Z, T) et (X', Y', Z' T') décrivent des figures homographiques.

D'après cela, si le point (X, Y, Z, T) décrit une surface de classe m et d'ordre p, la quartique de Steiner qui lui correspond a pour enveloppe de première classe une surface de classe $3m$, tangente $2m$ fois aux plans tangents doubles de la quartique, et le point central de la quartique décrit une surface de classe m et d'ordre p.

De là le théorème suivant :

Théorème XII. — *Quand une quartique de Steiner a ses quatre plans tangents doubles invariables et reste tangente à une surface de classe* $3m$, *tangente elle-*

même $2m$ fois aux plans tangents doubles de la quartique, le point central de la quartique décrit une surface de classe m.

Cas particuliers :

1° $m = 0$. Si une quartique de Steiner a ses quatre plans tangents doubles invariables et reste tangente à un cinquième plan fixe, son point central décrit un plan. Ce théorème est analogue à celui de Newton sur le lieu du centre d'une conique inscrite à un triangle et tangente à une quatrième droite.

2° $m = 1$. Si une quartique de Steiner a ses quatre plans tangents doubles invariables et reste tangente à une quartique de Steiner donnée ayant les mêmes plans tangents doubles, le point central de la quartique variable reste immobile.

3° Pour $m = 2$, le point central décrit une quadrique.

On peut combiner ces divers théorèmes deux à deux, on aura ainsi des théorèmes complexes, d'après lesquels le point central devra décrire certaines lignes.

20. Nous avons vu qu'à un point quelconque H de la figure ABCD correspond dans l'autre figure une quartique de Steiner et que le point central H′ de cette quartique est lié au point H, de telle manière que ces deux points décrivent des figures homographiques. Il est intéressant de se demander dans quel cas les plans à l'infini se correspondent dans ces deux figures homographiques.

Théorème XIII. — *Pour que les plans de l'infini se correspondent dans les figures* H *et* H′, *il faut et il suffit que les plans de l'infini se correspondent dans la transformation définie par les relations* (12).

D'après la formule (30), au plan de l'infini de la figure H′ correspond dans la figure H le plan qui a pour

équation

$$\frac{X}{\lambda A'} + \frac{Y}{\mu B'} + \frac{Z}{\nu C'} + \frac{T}{\rho D'} = 0.$$

Donc, pour que les plans de l'infini se correspondent dans les figures H et H', il faut et il suffit que ce dernier plan coïncide avec le plan dont l'équation est

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

c'est-à-dire que les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$\lambda AA' = \mu BB' = \nu CC' = \rho DD',$$

ce qui prouve que le théorème actuel est une conséquence du théorème VIII.

21. On connaît les propriétés de ces figures homographiques où les plans de l'infini se correspondent.

Et d'abord, à des plans parallèles de la figure H correspondent des plans parallèles de la figure H'; et à des droites parallèles d'autres droites parallèles.

D'autre part, les volumes correspondants des figures H et H' sont dans un rapport constant. C'est ce que M. Chasles a établi dans son *Mémoire sur l'homographie*. Nous avons depuis déduit ce théorème du calcul des déterminants, et nous avons donné la valeur du rapport sous forme de déterminant (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1873).

Pour calculer le rapport des volumes correspondants, au lieu de nous servir du déterminant dont nous venons de parler, nous prendrons deux volumes correspondants simples et nous calculerons directement leur rapport.

Remarquons pour cela que la formule (30), dans le cas actuel, peut s'écrire

(31) $$D'T' = V' \frac{AX + BY + CZ}{\Sigma AX},$$

ou encore

$$(32)\qquad D'T' = \frac{V'}{3V}(3V - DT).$$

Par conséquent, à tous les points du plan ABC ($T = 0$) de la figure H correspondent dans la figure H′ tous les points du plan

$$D'T' = V',$$

plan qui est parallèle à la face A′ B′ C′ et qui coupe la hauteur abaissée du point D′ sur cette face, de façon que le segment situé du côté du pied est le tiers de la hauteur totale.

Soient alors α', β', γ', δ' les centres de gravité des faces dont les aires sont A′, B′, C′, D′. Il est visible que les faces de même nom des tétraèdres ABCD et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ se correspondent dans ces figures homographiques H et H′; par où l'on voit que, si U′ et U désignent deux volumes correspondants quelconques dans les figures homographiques H′ et H, on a nécessairement

$$\frac{U'}{U} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}{ABCD}.$$

Or, ce dernier rapport est facile à trouver. Car le tétraèdre $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ est semblable au tétraèdre A′B′C′D′ et à ses dimensions trois fois plus petites, de sorte que l'on a

$$\alpha'\beta'\gamma'\delta = \frac{1}{27} A'B'C'D'.$$

On a donc enfin

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{27}\frac{A'B'C'D'}{ABCD}.$$

22. Au lieu de chercher dans quel cas les plans de l'infini se correspondent dans les figures homographiques H et H′, on peut se demander dans quel cas ces figures sont semblables.

Nous allons voir tout d'abord que le second cas n'est qu'une particularité du premier. En effet, si deux figures homographiques sont semblables, à des plans parallèles de l'une correspondent toujours dans l'autre des plans parallèles. Donc les plans de l'infini se correspondent.

Mais ce n'est pas tout. Le tétraèdre ABCD, homographique du tétraèdre $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, doit être semblable à ce dernier et par suite au tétraèdre A'B'C'D'.

Ainsi, pour que les figures H et H' soient semblables, il est nécessaire : 1° que les plans de l'infini s'y correspondent ; 2° que les deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' soient semblables. Nous allons prouver que ces conditions sont suffisantes ; et pour cela nous ferons voir que, si ces conditions sont remplies, la distance de deux points quelconques de la figure H est dans un rapport constant avec la distance des points correspondants de la figure H'.

Soient X_1, Y_1, Z_1, T_1 et X_2, Y_2, Z_2, T_2 les coordonnées de deux points quelconques dans la figure H. Désignons par d leur distance. Posons, pour abréger,

$$M = \frac{81(A+B+C+D)^2 V^4}{4A^2B^2C^2D^2}.$$

On voit immédiatement que M est une fonction homogène de degré o par rapport aux longueurs des arêtes du tétraèdre ABCD.

On a la formule

$$M d^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos XY & \cos XZ & \cos XT & 1 & X_2 - X_1 \\ \cos YX & 1 & \cos YZ & \cos YT & 1 & Y_2 - Y_1 \\ \cos ZX & \cos ZY & 1 & \cos ZT & 1 & Z^2 - Z_1 \\ \cos TX & \cos TY & \cos TZ & 1 & 1 & T_2 - T_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 & T_2 - T_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

(PAINVIN.)

Cette formule peut s'écrire

$$(33)\quad Md^2 = \Sigma\xi(X_2 - X_1)^2 + 2\Sigma(\xi, \eta)(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1),$$

les coefficients ξ, (ξ, η) et les analogues étant fonctions des angles des faces seulement.

Considérons maintenant les points de la figure H′, qui correspondent aux points (X_1, Y_1, Z_1, T_1) et (X_2, Y_2, Z_2, T_2) de la figure H; et soient (X'_1, Y'_1, Z'_1, T'_1) et (X'_2, Y'_2, Z'_2, T'_2) les coordonnées de ces deux points. Désignons par d' la distance de ces deux nouveaux points et constatons que les quantités M, ξ, (ξ, η), ... sont les mêmes dans la figure H′ que dans la figure H, attendu que les tétraèdres ABCD et A′B′C′D′ sont supposés semblables. Nous avons donc

$$(34)\quad Md'^2 = \Sigma\xi(X'_2 - X'_1)^2 + 2\Sigma(\xi, \eta)(X'_2 - X'_1)(Y'_2 - Y'_1).$$

D'autre part, en vertu de la formule

$$D'T' = \frac{V'}{3V}(3V - DT),$$

qui a lieu toutes les fois que les plans de l'infini se correspondent dans les figures H et H′, on obtient sans peine

$$(35)\quad D'(T'_2 - T'_1) = -\frac{V'}{3V}D(T_2 - T_1).$$

Les tétraèdres ABCD et A′B′C′D′ étant semblables, posons

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{m},$$

d'où

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{m^3} \quad \text{et} \quad \frac{D'}{D} = \frac{1}{m^2}.$$

La formule (35) s'écrit alors

$$(36)\quad T'_2 - T'_1 = -\frac{1}{3m}(T_2 - T_1).$$

ou encore

$$(6)\quad \begin{cases} \varepsilon\left[\varphi'_p(\lambda_0) + \ldots + \dfrac{\varepsilon^{p-1}}{p!}\varphi_p^{p}(\lambda_0) + x\,\varphi'_{p-1}(\lambda_0) + \ldots\right] \\ \qquad + x^q\left[\varphi_{p+q}(\lambda_0) + \varepsilon\,\varphi'_{p+q}(\lambda_0) + \ldots\right] = 0. \end{cases}$$

λ_0 étant racine simple de l'équation $\varphi_p(\lambda) = 0$, $\varphi'_p(\lambda_0)$ est différent de zéro et les termes qui suivent $\varphi'_p(\lambda_0)$ dans les premières parenthèses renferment tous soit x, soit ε en facteur; il en est de même pour les termes renfermés dans les secondes parenthèses, à l'exception du premier. Or, quand ε est nul, l'équation (6) acquiert q racines nulles en x; par suite, quand ε tend vers zéro, q racines de l'équation (6) tendent vers zéro; l'équation (6) peut s'écrire

$$(7)\qquad \varepsilon[\varphi'_p(\lambda_0) + \alpha] + x^q[\varphi_{p+q}(\lambda_0) + \beta] = 0,$$

α et β étant une somme d'un nombre fini de termes renfermant soit x, soit ε en facteur. Si l'on donne à ε une valeur très petite et déterminée et que l'on remplace x dans le premier membre de l'équation (7) par l'une des racines de cette même équation, l'équation (7) deviendra une identité, et l'on aura identiquement

$$(8)\qquad x^q = -\frac{\varphi'_p(\lambda_0) + \alpha}{\varphi_{p+q}(\lambda_0) + \beta} \times \varepsilon.$$

Si l'on substitue à la place de x l'une des q racines voisines de zéro, les quantités α et β, qui renferment toutes soit ε, soit x en facteur, deviennent aussi petites que l'on voudra, et une valeur approchée de l'une quelconque de ces racines sera donnée par l'équation (8), dans laquelle on fera $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Les q racines voisines de zéro seront donc données par l'équation

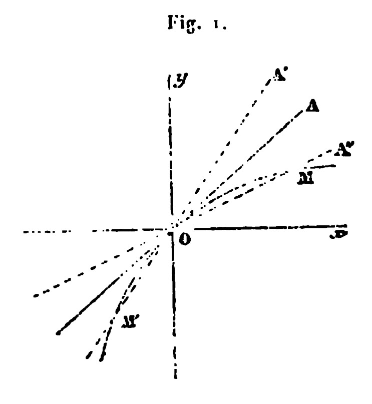
$$(9)\qquad x^q = -\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)} \times \varepsilon.$$

Supposons q impair; l'équation (9) n'aura jamais qu'une seule racine réelle, et, pour des valeurs de ε positives, cette racine sera d'un signe contraire à celui de $\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)}$.

L'interprétation géométrique des considérations précédentes est très aisée.

Soient (*fig.* 1) Ox, Oy les axes de coordonnées, OA la droite dont le coefficient angulaire est λ_0, OA' la

Fig. 1.

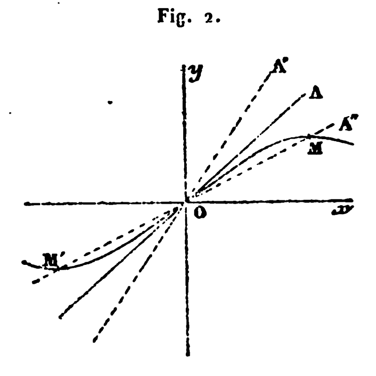


droite dont le coefficient angulaire est $\lambda_0 + \varepsilon$; dans l'hypothèse de q impair, une seule racine réelle de l'équation (7) tend vers zéro, c'est-à-dire qu'une seule branche réelle passe à l'origine. Supposons que le rapport $\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)}$ soit positif, la racine réelle infiniment petite sera négative, et l'on aura sur la sécante OA' un seul point M' de la courbe dans le voisinage de l'origine. Quand ε tend vers zéro, la sécante OA' tend vers OA et le point M' tend indéfiniment vers le point O; la droite OA est donc tangente à la courbe M'O engendrée par le point M', et cette courbe est tout entière située au-dessous de sa tangente.

Si maintenant on donne à ε des valeurs négatives, la racine réelle infiniment petite de l'équation (7) est positive; on obtient sur la sécante OA'' un point M situé dans la région positive des x; quand ε tend vers zéro par valeurs négatives, le point M engendre la branche MO, qui est également tangente en O à la droite OA. La racine infiniment petite réelle de l'équation (7) donne donc la branche M'OM, et le signe du rapport $\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)}$ donne la position de la courbe par rapport à la tangente.

Supposons maintenant q pair et $\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)}$ positif; pour des valeurs positives de ε, toutes les racines infiniment petites de l'équation (7) sont imaginaires; la sécante OA' ne rencontre donc pas la courbe dans le voisinage du point O. Mais si l'on donne à ε des valeurs négatives, deux des racines infiniment petites de l'équation (7) sont réelles; l'une d'elles est positive et l'autre négative. On obtient donc sur la sécante OA'' deux points M et M' (*fig.* 2) situés de part et d'autre de l'origine. Quand ε tend vers zéro, les deux points M et M' se rapprochent

Fig. 2.



de l'origine et engendrent la courbe MOM' tangente en O à la droite OA. Cette droite OA est une tangente d'inflexion.

On peut en dire autant de toutes les racines simples de l'équation $\varphi_p(\lambda) = 0$; on construira la branche correspondant à chacune de ces racines comme nous l'avons fait.

3. Considérons maintenant le cas où $\varphi_p(\lambda) = 0$ admet une racine double λ_0.

Dans ce cas, $\varphi'_p(\lambda_0) = 0$ et $\varphi''_p(\lambda_0) \gtrless 0$; l'équation (5) pourra s'écrire

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \ldots + \frac{\varepsilon^p}{p!}\varphi_p^{(p)}(\lambda_0) \\ &\qquad + x[\varphi_{p+1}(\lambda_0) + \varepsilon\varphi'_{p+1}(\lambda_0) + \ldots] \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad + x^{m-p}\left[\varphi_m(\lambda_0) + \ldots + \frac{\varepsilon^m}{m!}\varphi_m^{(m)}(\lambda_0)\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons que λ_0 n'annule pas la fonction $\varphi_{p+1}(\lambda)$; dans ce cas, l'équation précédente pourra s'écrire

$$(11)\qquad \frac{\varepsilon^2}{1.2}[\varphi''_p(\lambda_0) + \alpha] + x[\varphi_{p+1}(\lambda_0) + \beta] = 0,$$

α et β étant, comme plus haut, une somme d'un nombre fini de termes renfermant tous soit x, soit ε en facteur.

α et β s'évanouissent donc quand on suppose que x représente la racine infiniment petite de l'équation (10).

On tire de (11)

$$(12)\qquad x = -\frac{\varphi''_p(\lambda_0) + \alpha}{\varphi_{p+1}(\lambda_0) + \beta} \times \frac{\varepsilon^2}{1.2}.$$

Une valeur approchée de x est l'expression

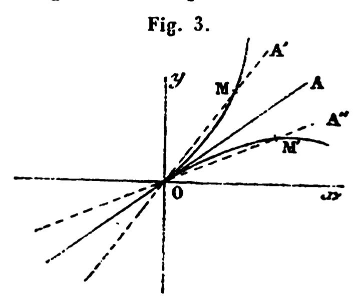
$$(13)\qquad x = -\frac{\varphi''_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+1}(\lambda_0)} \times \frac{\varepsilon^2}{1.2},$$

obtenue en faisant dans l'équation (12) $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

On voit que, quel que soit le signe de ε, x a le signe de

$-\dfrac{\varphi''_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+1}(\lambda_0)}$. On obtient donc une courbe telle que MOM′ (*fig.* 3), située de part et d'autre de la droite OA et dans la région des x positifs ; le point O est un point de rebroussement de première espèce.

Fig. 3.



Ce que l'on vient de trouver s'applique à toutes les racines doubles de l'équation

$$\varphi_p(\lambda) = 0$$

qui n'annulent pas la fonction $\varphi_{p+1}(\lambda)$.

4. Considérons maintenant le cas où $\varphi_{p+1}(\lambda_0) = 0$ et $\varphi'_{p+1}(\lambda_0) \gtrless 0$, ainsi que $\varphi_{p+2}(\lambda_0) \gtrless 0$; λ_0 étant supposé racine double de $\varphi_p(\lambda) = 0$, on a toujours $\varphi''_p(\lambda_0) \gtrless 0$.

L'équation (5) prendra la forme

$$(14)\qquad \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + x\varepsilon\varphi'_{p+1}(\lambda_0) + x^2\varphi_{p+2}(\lambda_0) + \gamma = 0,$$

γ étant une somme de termes qui renferment tous soit x^2, soit ε^2 en facteur.

Posons

$$x = \xi\varepsilon,$$

ξ étant une nouvelle fonction de ε ; si l'on substitue cette valeur de x dans (14), le premier membre de l'équation sera divisible par ε^2 et l'équation (14) deviendra

$$(15)\qquad \frac{1}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \xi\varphi'_{p+1}(\lambda_0) + \xi^2\varphi_{p+2}(\lambda_0) + \gamma' = 0,$$

γ' étant une somme de termes qui renferment tous ε en facteur. Quand ε est très petit, la fonction ξ a une valeur aussi voisine que l'on veut de la valeur de l'une des racines de l'équation du deuxième degré

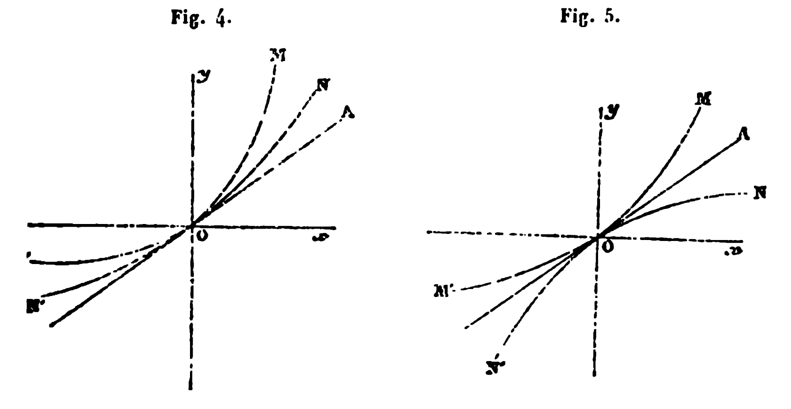
$$(16) \qquad \frac{1}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \xi\varphi'_{p+1}(\lambda_0) + \xi^2\varphi_{p+2}(\lambda_0) = 0.$$

Soient ξ_0 et ξ_1 les racines de l'équation (16).

1° Supposons ξ_0 et ξ_1 réelles et inégales. Les deux racines de l'équation en x qui tendent vers zéro avec ε auront pour valeurs approchées

$$x = \xi_0\varepsilon, \quad x = \xi_1\varepsilon.$$

Par suite, si ξ_0 et ξ_1 sont de même signe, la courbe présentera dans le voisinage du point O et de la tangente OA la disposition de la *fig.* 4 (ξ_0 et ξ_1 étant suppo-



sés positifs), et la disposition de la *fig.* 5 si ξ_0 et ξ_1 sont de signes contraires.

2° Supposons que les racines de l'équation (16) soient imaginaires; l'équation (15) ne pourra pas être satisfaite pour des valeurs infiniment petites de ε, car, pour ces valeurs, γ' est aussi voisin de zéro que l'on veut et le pre-

mier membre de l'équation (16) conserve toujours une valeur finie. Dans ce cas, il n'y a pas de branches réelles tangentes à la droite OA : au point O se croisent deux branches de courbes imaginaires tangentes à OA. Si les racines de l'équation $\varphi_p(\lambda) = 0$, autres que λ_0, ne donnent pas non plus de branches réelles, le point O sera un point isolé.

3° Supposons enfin que les racines de l'équation (16) soient égales. L'équation (15) prendra la forme

$$\varphi_{p+2}(\lambda_0)(\xi - \xi_0)^2 + A\varepsilon - B\varepsilon^2 - C\varepsilon^3 + \ldots = 0,$$

et, par suite,

$$\xi - \xi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A\varepsilon + B\varepsilon - \ldots}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}};$$

les deux valeurs de ξ qui ont pour limite ξ_0 ont pour valeurs approchées

$$\xi = \xi_0 \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}\varepsilon},$$

en supposant $A \gtrless 0$.

ε ne pourra recevoir que des valeurs de signe contraire à $\frac{A}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}$, et les valeurs correspondantes de x sont

$$x = \xi_0\varepsilon \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}\varepsilon^3}.$$

A ces deux racines correspondent deux branches tangentes à OA, mais du même côté de OA ; le point O est un point de rebroussement de seconde espèce (*fig.* 6).

Si A est nul, les valeurs approchées de x prennent la forme

$$x = \left[\xi_0 \pm \sqrt{\frac{-B}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}}\right]\varepsilon.$$

Si la quantité sous le radical est négative, le point O est isolé ; si elle est positive, les deux racines infiniment pe-

tites donnent deux branches qui offrent la disposition de la *fig.* 4, ou celle de la *fig.* 5.

Si B est nul sans que C le soit, la courbe a la forme de la *fig.* 6, et ainsi de suite.

Fig. 6.

5. En admettant toujours que λ_0 soit racine double de l'équation $\varphi_p(\lambda_0) = 0$, supposons que l'on ait d'une manière générale

$$ {}_{1}(\lambda_0) = 0, \quad \varphi_{p+2}(\lambda_0) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{p+N-1}(\lambda_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{p+N}(\lambda_0) \gtrless 0, $$

$$ {}_{1}(\lambda_0) = 0, \quad \varphi'_{p+2}(\lambda_0) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi'_{p+n-1}(\lambda_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_{p+n}(\lambda_0) \gtrless 0; $$

l'équation (5) prendra la forme

$$ (17) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi''_p(\lambda_0) + \varepsilon x^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + x^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta = 0, $$

δ étant une somme d'un nombre fini de termes qui sont tous infiniment petits devant l'un des trois termes qui sont en évidence.

Il est aisé de voir que l'équation (17) a la forme la plus générale que l'on puisse donner à (5).

Nous supposerons d'abord $n \gtreqless N$; l'hypothèse de $n \geq N$ réduit l'équation (17) à la forme

$$ \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi''_p(\lambda_0) + x^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta_1 = 0. $$

Si N est impair, on obtient une sorte de rebroussement de première espèce (*fig.* 3).

Si N est pair, le point O est isolé si $\varphi''_p(\lambda_0)$ et $\varphi_{p+N}(\varphi_0)$ sont de même signe, et la courbe présente la disposition de la *fig.* 5 si $\varphi''_p(\lambda_0)$ et $\varphi_{p+N}(\lambda_0)$ sont de signes contraires.

Soit actuellement $n < N$.

Changeons de variable et posons

$$x = \xi \times \varepsilon^\mu,$$

l'équation (17) prendra la forme

$$(18) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \varepsilon^{n\mu+1}\xi^n\varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \varepsilon^{N\mu}\xi^N\varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta' = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite par des valeurs réelles ou imaginaires de ξ et par suite de x, il faut que deux des trois exposants de ε, savoir

$$2,\ n\mu + 1,\ N\mu,$$

soient égaux; autrement, l'équation (18), débarrassée d'une certaine puissance de ε, deviendrait impossible, un terme fini ne pouvant se réduire avec une somme finie de termes tous infiniment petits.

On aura donc, soit

$$2 = n\mu + 1,$$

ou bien

$$2 = N\mu,$$

ou enfin

$$n\mu + 1 = N\mu.$$

1° L'hypothèse $2 = n\mu + 1$ donne

$$n\mu = 1,\quad \mu = \frac{1}{n}\quad \text{et}\quad N\mu = \frac{N}{n}.$$

L'équation (18) deviendra donc, après la suppression

du facteur ε^2,

$$(19) \quad \frac{1}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \xi^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \varepsilon^{\frac{N}{n}-2}\xi_N \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta'' = 0.$$

Si $\frac{N}{n} < 2$, l'équation (19) est impossible.

Si $\frac{N}{n} = 2$, l'équation (18) devient

$$(20) \quad \frac{1}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \xi^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \xi^{2n}\varphi_{p+2n}(\lambda_0) + \delta'' = 0;$$

les $2n$ valeurs approchées de ξ sont données par l'équation trinôme

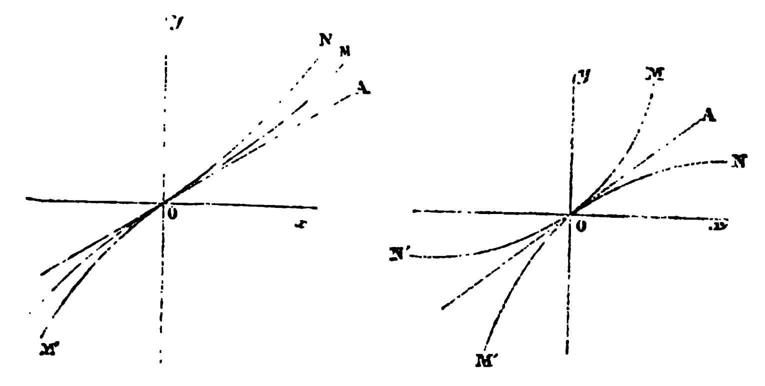
$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \xi^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \xi^{2n}\varphi_{p+2n}(\lambda_0) = 0.$$

Supposons n pair.

Cette équation est du second degré en ξ^n.

1° Si les racines de cette équation du second degré sont

Fig. 7. Fig. 8.



réelles et inégales, soient ξ_0 et ξ_1, les valeurs approchées des racines de l'équation en x sont

$$x = \sqrt[n]{\xi_0}\,\varepsilon,$$

$$x = \sqrt[n]{\xi_1}\,\varepsilon;$$

par suite, si ξ_0 et ξ_1 sont de même signe, la courbe affecte la forme de la *fig.* 7; si ξ_0 et ξ_1 sont de signes contraires, la courbe aura une forme analogue à celle de la *fig.* 8.

2° Si les racines de l'équation du second degré en ξ^n sont imaginaires, le point O est isolé, à moins que d'autres branches réelles provenant de racines différentes de λ_0 ne se croisent au point O.

3° Si les racines de l'équation du second degré en ξ^n sont égales, l'équation (20) prend la forme

$$\varphi_{p+2n}(\lambda_0)(\xi^n - \xi_0)^2 + A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \ldots = 0$$

ou

$$\xi^n = \xi_0 \pm \sqrt{-\frac{A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \ldots}{\varphi_{p+2n}(\lambda_0)}};$$

les valeurs approchées de ξ^n sont donc

$$\xi^n = \xi_0 \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_{p+2n}(\lambda_0)}\varepsilon}.$$

Si A est différent de zéro, n étant pair, on obtient pour ξ quatre valeurs réelles infiniment peu différentes de $\sqrt[n]{\xi_0}$ si ξ_0 est positif.

Si ξ_0 est négatif, les racines sont toutes imaginaires.

Si ξ_0 est positif, la courbe affecte une forme analogue à celle de la *fig.* 9.

Si n est impair, la forme affectée par la courbe dans le cas où les racines de l'équation en ξ^n sont réelles et inégales est analogue à celle des *fig.* 4 ou 5.

Examinons enfin la troisième hypothèse, savoir $\frac{N}{n} > 2$; l'équation (19) devient alors

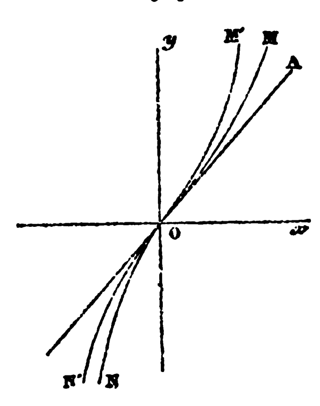
$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \xi^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \delta''' = 0,$$

δ''' étant une somme de termes qui s'évanouissent avec ε.

et les valeurs approchées de ξ sont données par l'équation

$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \xi^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) = 0.$$

Fig. 9.



Si n est pair, les racines infiniment petites, dont la valeur approchée a pour expression

$$x = \sqrt[n]{\frac{-\varphi''_p(\lambda_0)}{\varphi'_{p+n}(\lambda_0)}}\,\varepsilon,$$

fournissent une branche de courbe qui a, par rapport à la tangente OA, la disposition présentée par la *fig.* 2.

Faisons maintenant la seconde hypothèse sur les exposants de ε, savoir

$$2 = N\mu.$$

On en tire

$$\mu = \frac{2}{N};$$

l'exposant $n\mu + 1$ devient, par suite,

$$\frac{2n}{N} + 1.$$

Pour que l'équation soit possible, il faut que

$$\frac{2n}{N} + 1 \geqq 2,$$

par suite $N \leqq 2n$.

Si donc $N < 2n$, il ne sera pas possible d'égaler les exposants 2 et $n\mu + 1$, mais on pourra égaler 2 à $N\mu$; l'équation (18) devient, dans ce dernier cas,

$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(\lambda_0) + \xi^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta^{1v} = 0,$$

et les racines infiniment petites, au nombre de N, auront pour expression

$$x = \sqrt[N]{\frac{-\varphi''_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+N}(\lambda_0)}}\,\varepsilon^2.$$

Si N est pair et si $\frac{\varphi''_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+N}(\lambda_0)} > 0$, les n racines sont imaginaires et il ne correspond aucune branche réelle à ces racines.

Mais, si N est pair et si $\frac{\varphi''_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+N}(\lambda_0)} < 0$, deux des racines infiniment petites sont réelles et donnent une disposition analogue à celle de la *fig.* 8.

Examinons enfin le cas où

$$n\mu + 1 = N\mu,$$

$$\mu = \frac{1}{N - n};$$

pour que l'équation (18) soit possible, il faut que $N\mu \leqq 2$ ou bien

$$\frac{N}{n} \geqq 2;$$

l'équation (18) devient alors

$$\xi^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \xi^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta^v = 0,$$

et les valeurs approchées de ξ sont données par l'équation

$$\xi^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \xi^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) = 0,$$

qui donne $\xi^n = 0$ avec

$$\varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \xi^{N-n} \varphi_{p+N}(\lambda_0) = 0.$$

Dans le cas de $\frac{N}{n} > 2$, nous avons déjà trouvé n racines infiniment petites dont l'expression approchée est

$$x = \sqrt[n]{\frac{-\varphi''_p(\lambda_0)}{\varphi'_{p+n}(\lambda_0)}}\,\varepsilon;$$

les $N - n$ autres racines sont données en valeur approchée par la formule

$$x = \sqrt[N-n]{-\frac{\varphi'_{p+n}(\lambda_0)}{\varphi_{p+N}(\lambda_0)}}\,\varepsilon;$$

elles se construisent comme les précédentes.

Toutes les racines doubles de l'équation $\varphi_p(\lambda) = 0$ donnent lieu à une discussion semblable.

Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse, mais on voit aisément la marche qu'il faut suivre dans les cas plus complexes d'une racine triple, etc.

L'analyse complète des racines infiniment petites d'une équation algébrique de la forme (5) et l'étude de toutes les circonstances qui peuvent se présenter ont été faites par M. Puiseux dans son beau Mémoire sur les fonctions algébriques.

Le cas où le point multiple à étudier n'est pas à l'origine se ramène immédiatement au cas précédent par une transformation qui équivaut à une translation des axes.

SOLUTION DES QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

(voir 2e série, t. XIX, p. [illegible]);

PAR M. LANNES,
Élève du lycée de Tarbes.

I. 1° *On considère un quadrilatère* ABCD *dans lequel on a* AB = BC *et* CD = DA : *on demande de prouver que ce quadrilatère est circonscriptible à deux cercles.*
2° *On déforme ce quadrilatère de telle manière que les côtés demeurent invariables et que les points* A, B *demeurent fixes : on demande le lieu des centres des cercles inscrits aux différentes positions du quadrilatère.*

II. *Étant données les deux équations*

$$ax - [illegible] = [illegible], \quad \frac{a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = 0,$$

[illegible] *par des formules ne con-* [illegible] *dénominateur. Chercher dans* [illegible] *sont réelles.*

[illegible] — 1° Il résulte des égalités suppo- [illegible] CD = DA que la diagonale BD est à la [illegible] B, D du quadrilatère consi- [illegible] ABD, CBD sont symétriques [illegible] BD. Par suite, les bissectrices des [illegible] rencontrent la droite BD en un même [illegible] centre d'un cercle inscrit au quadri- [illegible]

[illegible] extérieures des angles BAD.

BCD rencontreront la droite BD prolongée en un point E′, également distant des quatre côtés du quadrilatère; ce point sera donc le centre d'un second cercle inscrit au quadrilatère.

2° En supposant que le quadrilatère se déforme conformément à l'énoncé, proposons-nous de trouver les *lieux géométriques des centres* E, E′ *des cercles inscrits, aux différentes positions du quadrilatère.*

La droite BE étant la bissectrice de l'angle A du triangle ABD, on a

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB} + \mathrm{AD}}$$

ou, en posant $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{AD} = b$,

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{a}{a+b},$$

où a et b sont invariables.

L'égalité de rapports $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{a}{a+b}$ montre que le point E décrit une ligne homothétique à celle qui est décrite par le point D. Or cette dernière est une circonférence, puisque le point A est fixe et que la valeur de AD est invariable; donc le lieu du point E est une circonférence.

Le centre de cette circonférence est, sur la droite BA, en un point I déterminé par l'égalité de rapports

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BA}} = \frac{a}{a+b}.$$

Le triangle DAE′, dans lequel la droite AE′ est la bissectrice extérieure de l'angle BAD, donne

$$\frac{\mathrm{BE'}}{\mathrm{DE'}} = \frac{a}{b},$$

d'où

$$\frac{BE'}{DE' - BE'} = \frac{a}{b-a}, \quad \frac{BE'}{BD} = \frac{a}{b-a}.$$

Ainsi, le point E′ décrit une ligne homothétique à celle qui est décrite par le point D, c'est-à-dire une circonférence dont le centre I′ est un point situé sur la droite AB prolongée, et déterminé par l'égalité

$$\frac{BI'}{BA} = \frac{a}{b-a}.$$

Le point I′ est d'ailleurs le conjugué harmonique de I par rapport aux points fixes A, B.

Calcul des rayons. — Désignons par r et r' les rayons des circonférences dont les centres sont I et I′.

On a

$$\frac{r}{b} = \frac{BI}{BA} = \frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{r'}{b} = \frac{BI'}{BA} = \frac{a}{b-a},$$

d'où

$$r = \frac{ab}{a+b} \quad \text{et} \quad r' = \frac{ab}{b-a}.$$

Si $b = a$, il vient

$$r = \frac{b}{2}, \quad r' = \infty.$$

Le centre I est alors au milieu de AB; son conjugué harmonique est à l'infini sur la droite BA. Le quadrilatère ABCD est un losange; la circonférence I′ n'existe plus : le quadrilatère n'est alors circonscriptible qu'à une seule circonférence.

II. *Seconde question.* — Posons $\frac{z}{y} = \alpha$, $\frac{x}{z} = \text{ϐ}$, $\frac{y}{x} = \gamma$.

Des deux équations données, $ax + by + cz = 0$,

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, on tire

$$ax=-(by+cz) \quad \text{et} \quad \frac{a}{x}=-\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right).$$

En multipliant membre à membre ces deux dernières équations, il vient

$$\begin{aligned} a^2=(by+cz)\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)&=b^2+c^2+bc\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right) \\ &=b^2+c^2+bc\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$a^2\alpha=(b^2+c^2)\alpha+bc\alpha^2+bc,$$
$$bc\alpha^2-(a^2-b^2-c^2)\alpha+bc=0,$$

équation qui donne

$$\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2\pm\sqrt{(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2}}{2bc},$$
$$\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2\pm\sqrt{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2}}{2bc}.$$

On aurait de même

$$\beta=\frac{b^2-a^2-c^2\pm\sqrt{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}}{2ac},$$
$$\gamma=\frac{c^2-a^2-b^2\pm\sqrt{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}}{2ab}.$$

Pour que les valeurs de α, β, γ soient réelles, il faut que l'on ait

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2>0.$$

Or

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2,$$

et, en décomposant $(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$ en facteurs

du premier degré, on a

$$(1)\left\{\begin{array}{l}(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2\\ \quad =-(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c),\end{array}\right.$$

ou, en posant $a+b+c=2p$,

$$(2)\quad (a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2=-16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Supposons que les trois quantités a, b, c soient positives. Pour que $(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$ soit positif, il faut et il suffit, d'après l'égalité (1), que l'une des trois quantités a, b, c soit plus grande que la somme des deux autres, ce qui est la condition de réalité des rapports $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{x}$ ou α, β, γ.

Si chacune des trois quantités a, b, c est moindre que la somme des deux autres, on pourra les considérer comme les valeurs des côtés d'un triangle, et exprimer d'une manière remarquable les quantités imaginaires α, β, γ en fonction des éléments de ce triangle.

En effet, soient s et $2p$ la surface et le périmètre du triangle dont les côtés sont a, b, c.

L'égalité

$$\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2\pm\sqrt{(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2}}{2bc},$$

ou

$$\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2\pm\sqrt{-16p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2bc},$$

donnera

$$\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2\pm 4s\sqrt{-1}}{2bc}.$$

Remplaçons $2s$ par sa valeur $bc\sin A$, puis ajoutons et retranchons successivement au numérateur $2bc\cos A$: il en résultera

$$\alpha=\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc\cos A)-2bc\cos A\pm 2bc\sin A\sqrt{-1}}{2bc}.$$

et, à cause de l'égalité $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, on aura

$$\alpha = -\cos A \pm \sqrt{-1}\sin A = -(\cos A \mp \sqrt{-1}\sin A);$$

de même,

$$6 = -(\cos B \pm \sqrt{-1}\sin B),$$
$$\gamma = -(\cos C \pm \sqrt{-1}\sin C).$$

Nous avons supposé a, b, c positifs; si une ou deux de ces quantités, ou toutes trois étaient négatives, la condition de réalité de α, 6, γ serait encore la même : il faut, pour que α, 6, γ soient réels, que l'une des quantités a, b, c, abstraction faite des signes, soit plus grande que la somme des deux autres.

Note. — Autre solution de M. Leinekugel.

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1879);

SOLUTION DE M. A. LEINEKUGEL,
Étudiant en Mathématiques.

I. *Un cylindre et un cône droits à bases circulaires ont les surfaces égales et les volumes égaux. La hauteur est donnée, et l'on demande de calculer les rayons des bases.*

Soient h la hauteur donnée, x et y les rayons des bases du cylindre et du cône; les équations du problème sont

(1) $$2\pi x^2 + 2\pi hx = \pi y^2 + \pi y\sqrt{h^2 + y^2},$$

(2) $$\pi x^2 h = \frac{\pi y^2 h}{3}.$$

De la dernière on tire

$$y = x\sqrt{3},$$

et la première devient, en remplaçant y par $x\sqrt{3}$. et supprimant la solution $x = 0$, qui correspond au cas particulier où le cylindre et le cône se réduisent à la hauteur donnée h,

$$(3) \qquad 2h - x = \sqrt{3}\sqrt{h^2 + 3x^2},$$

d'où, en élevant au carré,

$$8x^2 + 4hx - h^2 = 0,$$

équation qui donne

$$x_1 = \frac{h(\sqrt{3} - 1)}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{h(\sqrt{3} + 1)}{4}.$$

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y_1 = \frac{h(3 - \sqrt{3})}{4} \quad \text{et} \quad y_2 = -\frac{h(\sqrt{3} + 3)}{4}.$$

Les valeurs x_1, y_1, qui sont positives, conviennent seules au problème; les valeurs négatives ont été introduites par l'élévation au carré de l'équation (3); prises en valeurs absolues, elles donnent la solution du problème suivant :

Un cylindre et un cône droits à bases circulaires ont des volumes égaux et même hauteur h; *les différences entre les surfaces latérales et les surfaces des bases sont égales; calculer les rayons des bases.*

II. *Dans un triangle* ABC *on donne les côtés* AB *et* AC, *et l'on sait que la base* BC *est égale à la hauteur : on demande de calculer l'angle* A.

Soient a, b, c les côtés du triangle. La base BC ou a

étant supposée égale à la hauteur qui lui correspond, le double de l'aire du triangle aura pour valeur a^2; la même surface a pour expression $bc\sin A$; donc $bc\sin A = a^2$, ou, parce que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, on aura

$$bc\sin A = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$(1) \qquad \sin A + 2\cos A = \frac{b^2+c^2}{bc}.$$

Désignons par φ un angle aigu tel que $\tang\varphi = 2$; en remplaçant, dans l'équation (1), 2 par $\tang\varphi$, ou $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, il viendra

$$\sin A\cos\varphi + \cos A\sin\varphi = \left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)\cos\varphi,$$

ou

$$(2) \qquad \sin(A+\varphi) = \frac{b^2+c^2}{bc}\cos\varphi.$$

Discussion. — $\sin(A+\varphi)$ ayant pour limites $+1$ et -1, il faut qu'on ait $\frac{(b^2+c^2)^2}{b^2c^2}\cos^2\varphi \leqq 1$ pour que l'angle $A+\varphi$ existe.

Mais $\tang\varphi = 2$ donne $\cos^2\varphi = \frac{1}{5}$; d'où

$$\frac{(b^2+c^2)^2}{b^2c^2}\cos^2\varphi = \frac{(b^2+c^2)^2}{5b^2c^2} \leqq 1$$

et

$$(b^2+c^2)^2 - 5b^2c^2 \leqq 0.$$

Or,

$$(b^2+c^2)^2 - 5b^2c^2 = (b^2+c^2+bc\sqrt{5})(b^2+c^2-bc\sqrt{5});$$

on aura donc

$$b^2+c^2-bc\sqrt{5} \leqq 0$$

ou

$$(3) \qquad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \sqrt{5} \leqq 0.$$

En posant $\frac{b}{c} = r$, la relation (3) devient

$$r + \frac{1}{r} - \sqrt{5} \leqq 0,$$

$$r^2 - r\sqrt{5} + 1 \leqq 0;$$

d'où

$$\left[r - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right]\left[r - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right] \leqq 0;$$

par suite,

$$r \leqq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{et} \quad r \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ce qui revient à

(4) $$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \geqq \frac{b}{c} \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Donc, pour que le triangle ABC existe, il faudra que le rapport $\frac{b}{c}$ des deux côtés donnés soit compris entre $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou bien égal à l'une de ces deux quantités.

Dans le premier cas, l'équation (2)

$$\sin(A + \varphi) = \left(\frac{b^2 + c^2}{bc}\right)\cos\varphi$$

donnera généralement pour l'angle A deux valeurs positives moindres chacune que 180°.

En effet, désignons par α le plus petit des angles ayant pour sinus $\frac{b^2+c^2}{bc}\cos\varphi$; l'angle φ étant aigu, $\cos\varphi$ est positif, et il en est de même de $\frac{b^2+c^2}{bc}\cos\varphi$; ainsi α est, comme φ, un angle aigu. En outre, en supposant les côtés donnés b, c inégaux, on aura $\alpha > \varphi$, parce que de

l'inégalité $b \gtrless c$ résulte $\frac{b^2+c^2}{bc} > 2$, d'où

$$\frac{b^2+c^2}{bc}\cos\varphi > 2\cos\varphi, \quad \sin\alpha > \operatorname{tang}\varphi\cos\varphi, \quad \sin\alpha > \sin\varphi.$$

Or, d'après les formules générales des angles ayant pour sinus $\frac{b^2+c^2}{bc}\cos\varphi$, on a

$$A+\varphi = 2k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad A+\varphi = (2k+1)\pi - \alpha,$$
$$A = 2k\pi + \alpha - \varphi, \quad A = (2k+1)\pi - \alpha - \varphi,$$

et, en faisant $k = 0$,

$$A = \alpha - \varphi \quad \text{et} \quad A = \pi - (\alpha + \varphi),$$

valeurs positives et moindres que $180°$.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. C. HENRY.

Dans les *Nouvelles Annales* (année 1878, p. 463), M. l'abbé Marchand a démontré que *le carré d'un nombre impair est la différence de deux nombres triangulaires premiers entre eux*. Cette propriété peut être généralisée au moyen de l'identité

$$(1)\quad \begin{cases} a(2x+1)^2 = \dfrac{(2ax+x+a)(2ax+x+a+1)}{2} \\ \qquad - \dfrac{(2ax-x+a-1)(2ax-x+a}{2}, \end{cases}$$

où x et a représentent des nombres entiers quelconques.

En faisant d'abord $a = 1$, l'identité (1) devient

$$(2x+1)^2 = \frac{(3x+1)(3x+2)}{2} - \frac{x(x+1)}{2},$$

et, comme $2x+1$ est premier avec x et $x+1$, on a ce théorème :

Le carré d'un nombre impair est la différence de deux nombres triangulaires premiers entre eux. Ce qui est le théorème de M. l'abbé Marchand.

En faisant $a=2$ et remplaçant x par $4x$, la formule (1) donne

$$2(8x+1)^2=\frac{(20x+2)(20x+3)}{2}-\frac{(12x+1)(12x+2)}{2};$$

on en peut conclure que *le double du carré d'un nombre de la forme* $8x+1$ *est la différence de deux nombres triangulaires premiers entre eux.*

En faisant $a=3$, on a

$$3(2x+1)^2=\frac{(7x+3)(7x+4)}{2}-\frac{(5x+2)(5x+3)}{2},$$

et par suite, en remplaçant x par $3x+1$,

$$3(6x+3)^2=\frac{(21x+10)(21x+11)}{2}-\frac{(15x+7)(15x+8)}{2}.$$

Il en résulte que *le triple carré d'un nombre de la forme* $6x+3$ *est la différence de deux nombres triangulaires premiers entre eux.*

On pourrait continuer ainsi indéfiniment.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1879;

Composition de Mathématiques.

Étant donné un tétraèdre OABC, défini par l'angle trièdre O et les longueurs $4a$, $4b$, $4c$ des trois arêtes OA, OB, OC :

1° Démontrer que l'ellipsoïde qui admet pour diamètres conjugués les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées deux à deux est tangent aux six arêtes du tétraèdre.

2° Trouver l'intersection de cet ellipsoïde et de l'hyperboloïde engendré par une droite mobile qui s'appuie sur trois droites menées, l'une par le milieu de l'arête OA parallèlement à OB, la seconde par le milieu de l'arête OB parallèlement à OC, la troisième par le milieu de l'arête OC parallèlement à OA.

3° Par chacun des points où la droite mobile perce la surface de l'ellipsoïde, on mène un plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde en l'autre point; démontrer que ces deux plans passent par le centre de l'ellipsoïde et trouver le lieu de l'intersection des deux plans.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, publicato da B. Boncompagni, Socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, Socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

T. XII (1879).

GENNAIO. — Intorno alla vita ed alle opere di *Prosdocimo de' Beldomandi*, matematico padovano del secolo XV; Memoria di *Antonio Favaro*, professore nella R. Università di Padova.

FEBBRAIO. — Intorno alla vita ed alle opere di *Prosdocimo*

de' Beldomandi, matematico padovano del secolo xv; Memoria di *Antonio Favaro*, professore nella R. Università di Padova (Continuazione).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Marzo. — Intorno alla vita ed alle opere di *Prosdocimo de' Beldomandi*, matematico padovano del secolo xv; Memoria di *Antonio Favaro*, professore nella R. Università di Padova (continuazione).

Aprile. — Intorno alla vita ed alle opere di *Prosdocimo de' Beldomandi*, matematico padovano del secolo xv; Memoria di *Antonio Favaro*, professore nella R. Università di Padova (fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Maggio. — Nuovi materiali per la storia della Facultà matematica dell' antica Università di Bologna. — *P. Riccardi.*

Notice sur la correspondance de *Jean Ier Bernoulli*. — *Gustaf Eneström*.

Quelques mots au sujet de la Note de M. *Maximilien Curtz* sur l'orthographe du nom et de la patrie de *Witelo*. — Dr *T. Zebrawski*.

Fisica tecnologica. || Elettricità e Magnetismo. || Telegrafia elettrica, elettrometallurgia. || Accensione elettrica delle mine. || Illuminazione elettrica, telefoni, etc. || Di || *Risaldo Ferrini*, || professore nel R. Istituto tecnico superiore di Milano. || M. E. del R. Istituto Lombardo. || 152 figure intercalate nel testo. || Napoli, Milano, Pisa, || Ulrico Hoepli, || editore-libbraio || 1878. In-8° di pagine xvi-574. — Ingre *Luigi dall' Oppio*.

Pappi Alexandrini || Collectionis || quæ supersunt || e Libris manuscriptis edidit, || latina interpretatione et commentariis || instruxit || *Fridericus Hultsch*. || Volumen I. || Insunt librorum II, III, IV, V reliquiæ. || Berolini, || apud Weidmannos, || MDCCCLXXVI. In-8° di xxiv-472 pagine. — Pappi Alexandrini || Collectionis || quæ supersunt || e Libris manuscriptis edidit, || latina interpretatione et commentariis || instruxit || *Fridericus Hultsch*. || Volumen II. || Insunt

librorum VI et XII reliquiæ. || Berolini, || apud Weidmannos. || MDCCLXXVII. In-8° di VIII e 548 pagine, numerate 473-1020. — Pappi Alexandrini || Collectionis || quæ supersunt || e Libris manuscriptis edidit, || latina interpretatione et commentariis || instruxit || *Fridericus Hultsch.* || Voluminis III Tomus I. || Insunt libri VIII reliquiæ. || Supplementa in Pappi Collectionem. || Berolini, || apud Weidmannos. || MDCCCLXXVIII. In-8° di XXII e 268 pagine, numerate 1021-1288 — Pappi Alexandrini || Collectionis || quæ supersunt || e Libris manuscriptis edidit, || latina interpretatione et commentariis || instruxit || *Fridericus Hultsch.* || Voluminis III TomusII. || Insunt || index græcitatis, scripturæ compendiorum conspectus. Index rerum ad mathematicam || disciplinam spectantium, conspectus auctorum. || Berolini, || apud Weidmannos. || MDCCCLXXVIII. In-8° di 148 pagine, IV-142, ultime 2 non numerate — *F. Hultsch.*

GIUGNO. — Intorno a *Johannes de Liueriis* (de Liveriis) e *Johannes Siculus.* Nota di *Steinschneider.*

Intorno alle vite inedite di tre matematici (*Giovanni Danck di Sassonia*, *Giovanni di Liueriis*, e Fra *Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro*), scritte da *Bernardino Baldi.* — *B. Boncompagni.*

Vite inedite di tre matematici (*Giovanni Danck di Sassonia*, *Giovanni di Liuediis* e Fra *Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro*); scritte da *Bernardino Baldi.*

Appendice di documenti inediti relativi a Fra *Luca Pacioli.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

LUGLIO. — Recherches sur les manuscrits de Pierre Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche; par *C. Henry.*

AGOSTO. — Recherches sur les manuscrits de Pierre Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche; par *C. Henry* (continuazione).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

SETTEMBRE. — Recherches sur les manuscrits de Pierre Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche; par *C. Henry* (continuazione).

Ottobre. — Recherches sur les manuscrits de Pierre Fermat. suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche; par *C. Henry* (fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Novembre. — Intorno ad alcune Notizie inedite relative a *Niccolo' Coppernico*, raccolte e pubblicate dal professore *Massimiliano Curtze*; per *Antonio Favaro*, Professore nella regia Università di Padova, Corrispondente della Società Coppernicana de Thorn.

Intorno a due scritti di *Leonardo Euler*. — B. Boncompagni.

Dimostrazione || del || quinto postulato di *Euclide*. || Nota || del professore *Vicenzo de Rossi Re*. || Estratto dagli *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*. || Anno XXXI, sessione VII del 16 giugno 1878. || Roma, || tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, || via Lata, n° 3; 1879. In-4° di 16 pagine. — *A. Genocchi*.

Invarianti, covarianti e contravarianti delle funzioni omogenee. Nota del P. *Giacomo Foglini*. Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, 1879 (70 p.). — Dr *S. Günther* Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna*.

Lagrange; par *Camille Tychsen*. Traduit du danois par *H.-C. Zeuthen*.

Lettres inédites de *Joseph-Louis Lagrange* à *Léonard Euler*, publiées par *B. Boncompagni* (Saint-Pétersbourg, 1877); par *Gustave Eneström*. Traduit du danois par MM. *Léouzon Le Duc* et *Aristide Marre*.

Dicembre. — Sulla Memoria inedita di *Pietro Maggi*, « Intorno ai principii di Meccanica molecolare di *Ambrogio Fusinieri* ». Nota di *Giambattista Biadego*.

Intorno ai principii di Meccanica molecolare del sig. Dottore *Ambrogio Fusinieri*. Dissertazione di *Pietro Maggi*.

Giunte all' articolo intitolato « Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni di Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo S. Sepolcro), scritte da *Bernardino Baldi*. — *B. Boncompagni*.

Materiali per la storia delle Scienze naturali presso gli

Arabi; per Eilardo Wiedemann. Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna*.

Materiali per la storia dell' Ottica fisiologica (Ruota de' colori e visione binoculare); per *Guglielmo von Bezold*. Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna*.

Sulla storia dell' invenzione dell' areometro; per *E. Gerland*. Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna*.

Deux mathématiciens de l'Oratoire; par *Aristide Marre*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

2. American Journal of Mathematics. — Editor in chief : *J.-J. Sylvester*, Associate editor in charge : *William E. Story*. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Cambridge, University press, printed for the editors by John Wilson and Son. New-York, B. Werstermann and C°; D. van Nostrand. Philadelphia, Ferree and C°. London, Trübner and C°. Paris, Gauthier-Villars. Berlin, A. Asher und C°. — Volume III, number 1. — March 1880.

Contents. — Regular figures in n-dimensional space, by *W.-I. Stringham*, fellow of the Johns Hopkins University. — On the algebra of Logic, by *C.-S. Peirce*. — On certain ternary cubic-form equations, by *J.-J. Sylvester*. — On the general equations of electro-magnetic action, with application to a new theory of magnetic attractions, and to the theory of the magnetic rotation of the plane of polarization of light, by *Henry A. Rowland*, professor of Physics in the Johns Hopkins University.

3. Mémoire sur les résidus des puissances n des nombres déterminés par les diviseurs premiers de la forme $2kn+1$, et sur la résolution de l'équation $x^n+y^n=z^n$ en nombres entiers pour $n>2$, présenté à

l'Académie des Sciences le 14 juin 1880, par M. *Auguste Lefébure*, docteur ès sciences, inspecteur d'Académie honoraire, à Privas (Ardèche). — Paris, imprimerie Arnous de Rivière, 26, rue Racine, 1880.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1318

(voir 2e série, t. XVIII, p. 528);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

Trouver un nombre ayant la double propriété d'être égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs et à celle des carrés de trois entiers consécutifs.

(LIONNET.)

Soit X un nombre ayant la double propriété d'être égal à

$$u^2 + (u+1)^2$$

et à

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2;$$

on aura

$$2u^2 + 2u + 1 = 3x^2 + 2,$$

et par suite

$$4u^2 + 4u + 2 = 6x^2 + 4,$$

$$(2u+1)^2 = 6x^2 + 3.$$

Le nombre $2u+1$ étant multiple de 3, on aura, en

posant $2u + 1 = 3y$,

$$9y^2 = 6x^2 + 3,$$
$$3y^2 = 2x^2 + 1,$$

ou

$$2x^2 - 3y^2 = -1.$$

Le développement de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ en fraction continue donne la fraction périodique mixte

$$1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}},$$

dont la période se compose des deux quotients incomplets 4, 2; les réduites successives sont

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{11}{9}, \frac{49}{40}, \frac{109}{89}, \frac{485}{396}, \frac{1079}{881}, \ldots.$$

Les numérateurs des réduites de rangs pairs sont les valeurs de x, et les dénominateurs de ces réduites les valeurs de y; on a ainsi

$$x = 1,\ 11,\ 109,\ 1079,\ \ldots,$$
$$y = 1,\ 9,\ 89,\ 881,\ \ldots.$$

Les valeurs correspondantes de u, déterminées par la relation $2u + 1 = 3y$, sont

$$u = 1,\ 13,\ 133,\ 1321,\ \ldots.$$

Puis les équations

$$X = u^2 + (u + 1)^2 = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2$$

donnent

$$X = 1^2 + 2^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5,$$
$$X = 13^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 365,$$
$$X = 133^2 + 134^2 = 108^2 + 109^2 + 110^2 = 35645,$$
$$X = 1321^2 + 1322^2 = 1078^2 + 1079^2 + 1080^2 = 3492725,$$
....,

et ainsi de suite.

La question admet donc une infinité de solutions.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Marcello Rochetti et Leinekugel.

Question 1333

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 479);

PAR M. A. DROZ.

Étant donnée une spirale logarithmique, on trace la polaire du pôle de cette spirale par rapport à un cercle osculateur à la courbe : trouver l'enveloppe de toutes les polaires ainsi obtenues. (LAISANT.)

Soient $\rho = ae^{m\omega}$ l'équation d'une spirale logarithmique et O le pôle.

On sait que cette courbe a les propriétés suivantes :

1° *Le rayon vecteur* OM, *mené à un point quelconque* M *de la courbe, fait avec la tangente en ce point un angle constant dont la tangente est* $\frac{1}{m}$.

2° *Le centre* C *du cercle osculateur à la courbe au point* M *est à la rencontre de la normale au point* M

et de la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur OM ([1]).

3° *La spirale logarithmique et sa podaire relative au pôle sont des courbes semblables dont le rapport de similitude est* $\sqrt{1+m^2}$.

4° *Le lieu géométrique de l'extrémité* T *de la sous-tangente* OT *est une spirale logarithmique dont le point* O *est le pôle et qui est semblable à la spirale* $\rho = ae^{m\omega}$, *le rapport de similitude étant* $\frac{1}{m}$.

Remarquons maintenant que la polaire du point O par rapport au cercle osculateur dont C est le centre et CM le rayon s'obtient en élevant une perpendiculaire à la droite CT, à l'extrémité T de la sous-tangente. Il s'ensuit que la podaire par rapport à O de la courbe enveloppe cherchée est une spirale logarithmique ; on en peut conclure que la courbe cherchée est elle-même une spirale logarithmique ayant le point O comme pôle.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Moret-Blanc, Fauquembergue, Leinekugel, L. Julliard, du lycée Corneille, à Rouen.

QUESTIONS.

1352. Soient :

A, B, C, D les aires des faces, S l'aire totale et V le volume d'un tétraèdre *abcd* ;

g le centre et R le rayon de la sphère inscrite dans ce tétraèdre ;

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

a_1, b_1, c_1, d_1 les points de rencontre des droites menées par les sommets du tétraèdre et le point g, avec les faces opposées;

a_2, b_2, c_2, d_2 les points de contact de la sphère inscrite avec les faces du tétraèdre;

V_1 le volume du tétraèdre $a_1 b_1 c_1 d_1$;

V_2 celui du tétraèdre $a_2 b_2 c_2 d_2$.

On a

$$V_1 = \frac{6\,\text{VABCD}}{(S-A)(S-B)(S-C)(S-D)},$$

$$V_2 = \frac{9R^2V^2}{4\,\text{ABCD}}.$$

Trouver les formules analogues pour le cas des sphères exinscrites. (GENTY.)

1353. Soient ABC un triangle donné, A_1, B_1, C_1 trois points pris sur les côtés de ce triangle et tels qu'on ait

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{l}{m}, \quad \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{l'}{m'}, \quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{l''}{m''};$$

l'aire du triangle $A_1B_1C_1$ est égale à l'aire du triangle ABC multipliée par

$$\frac{ll'l'' + mm'm''}{(l+m)(l'+m')(l''+m'')}.$$

(GENTY.)

Note. — M. Moret-lanc, et M. Émile Chrétien, élève au Lycée du Havre, nous ont adressé des solutions de la question 1342, déjà résolue dans le numéro d'octobre. M. Chrétien généralise la proposition énoncée, en démontrant que, *pour les trois coniques*, le point b est sur la perpendiculaire, menée par le point M, au diamètre conjugué de la corde ab.

SUR L'ÉVALUATION DE CERTAINS VOLUMES;

PAR M. L. MALEYX.

Cette Note est relative à diverses expressions du volume compris entre une surface et deux plans parallèles, quand l'aire interceptée par la surface sur un plan parallèle variable est une fonction rationnelle et entière de degré m de la distance d'un point fixe à ce plan variable.

1. Soient z la distance d'un point fixe P au plan parallèle variable, d la distance du même point à un des plans extrêmes. Si nous désignons par x la distance de ce plan fixe au plan variable, nous aurons l'égalité $z = d + x$. Par hypothèse, l'aire de la section interceptée par la surface sur le plan mobile situé à la distance z du point P est représentée par $F(z)$, F étant une fonction rationnelle entière, à coefficients déterminés et de degré m. Mais on a identiquement $F(z) = F(d+x) = f(x)$; l'aire variable dont il est question est donc aussi représentée par une fonction rationnelle entière de degré m, à coefficients déterminés, de la distance de son plan à l'un des plans parallèles servant de limite au volume qu'on veut évaluer.

2. D'après ce qui précède, supposant que l'aire variable interceptée dans la surface soit représentée par

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

on établit facilement, par un moyen absolument élémentaire ou immédiatement par l'intégration d'une fonction rationnelle, que le volume qu'on veut évaluer, prenant son origine au plan fixe qu'on a choisi et limité du reste au plan parallèle variable dont la distance au premier est x, est représenté par la fonction

$$\varphi(x) = ax + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_m \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

on a ainsi une expression du volume en fonction de la distance des plans parallèles extrêmes et des $m+1$ coefficients qui définissent $f(x)$. Si, au lieu des $m+1$ coefficients qui définissent $f(x)$, on se donne $m+1$ valeurs particulières de cette fonction correspondant à $m+1$ valeurs déterminées de x, on pourra, des équations qui en résulteront, déduire les valeurs des $m+1$ coefficients inconnus, et, en les reportant dans l'expression de $\varphi(x)$, on en déduira l'expression du volume au moyen de la distance des plans parallèles extrêmes et des nombres représentant les aires de $m+1$ sections faites dans la surface et parallèlement aux bases.

3. Pour obtenir cette expression, désignant par h la hauteur ou distance des plans parallèles extrêmes, par $B_1, B_2, \ldots, B_{m+1}$ les nombres représentant les aires des sections interceptées dans la surface sur les plans parallèles à la section extrême considérée et dont les distances à cette section sont représentées par $\alpha_1 h, \alpha_2 h, \ldots, \alpha_{m+1} h$, enfin par V le volume cherché, nous aurons les égalités

$$\begin{aligned}
B_1 &= a + a_1 h\alpha_1 + a_2 h^2\alpha_1^2 + \ldots + a_m h^m \alpha_1^m,\\
B_2 &= a + a_1 h\alpha_2 + a_2 h^2\alpha_2^2 + \ldots + a_m h^m \alpha_2^m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
B_{m+1} &= a + a_1 h\alpha_{m+1} + a_2 h^2\alpha_{m+1}^2 + \ldots + a_m h^m \alpha_{m+1}^m,\\
\frac{V}{h} &= a + a_1 h \times \frac{1}{2} + a_2 h^2 \times \frac{1}{3} + \ldots + a_m h^m \times \frac{1}{m+1}.
\end{aligned}$$

Ces égalités expriment que le système de $m+2$ équations homogènes du premier degré

$$\begin{aligned}
B_1 z &= z_1 + \alpha_1 z_2 + \alpha_1^2 z_3 + \ldots + \alpha_1^m z_{m+1},\\
B_2 z &= z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_2^2 z_3 + \ldots + \alpha_2^m z_{m+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
B_{m+1} z &= z_1 + \alpha_{m+1} z_2 + \alpha_{m+1}^2 z_3 + \ldots + \alpha_{m+1}^m z_{m+1},\\
\frac{V}{h} z &= z_1 + \frac{1}{2} z_2 + \frac{1}{3} z_3 + \ldots + \frac{1}{m+1} z_{m+1}
\end{aligned}$$

admet la solution $1,\ a,\ a_1 h,\ a_2 h^2,\ \ldots,\ a_m h^m$, dans laquelle les valeurs de toutes les inconnues ne sont pas simultanément nulles; il en résulte que le déterminant des coefficients de ces inconnues est nul, et l'on en déduit

$$\begin{vmatrix} B_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^m \\ B_2 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^m \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{m+1} & 1 & \alpha_{m+1} & \alpha_{m+1}^2 & \ldots & \alpha_{m+1}^m \\ \frac{V}{h} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{m+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, du premier degré par rapport à V, détermine le volume cherché et exprime qu'il est égal au produit de la hauteur h par une expression linéaire homogène des aires de $m+1$ sections planes parallèles aux bases et faites arbitrairement dans la surface, puisque les rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1}$ sont quelconques.

Désignons par Δ le déterminant mineur du précédent, formé en y supprimant la première colonne et la dernière ligne, et en général par Δ_k le déterminant mineur déduit de même en y supprimant la première colonne et la ligne de rang k; l'équation précédente pourra s'écrire sous la forme

$$B_1\Delta_1 - B_2\Delta_2 + B_3\Delta_3 - \ldots - (-1)^{m+1} B_{m+1}\Delta_{m+1} - (-1)^{m+2}\Delta \frac{V}{h}.$$

On peut attribuer aux nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ les valeurs qu'on voudra; toutefois on ne peut en faire deux égaux entre eux, car, s'il en était ainsi, que par exemple on fît $\alpha_l = \alpha_k$, tous les déterminants mineurs qui figurent dans l'équation précédente, sauf Δ_l et Δ_k, seraient identiquement nuls comme contenant deux lignes identiques. Le premier membre de l'équation se réduirait alors à $B_l\Delta_l \pm B_k\Delta_k$ suivant que l et k seraient de même parité ou de parités différentes; or ce binôme se réduirait aussi

à zéro, car de l'égalité $\alpha_l = \alpha_k$ on déduit $B_l = B_k$, et l'on voit facilement que $\Delta_l \pm \Delta_k$ est nul, que l et k soient de même parité ou de parités différentes. Dans ce cas exceptionnel, l'équation qui donne V serait identiquement satisfaite, et l'on ne pourrait en tirer la valeur de l'inconnue ; si au contraire les rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ sont finis, quelconques et tels que deux d'entre eux ne soient pas égaux, on aura toujours

$$V = (-1)^{m+2}\frac{h}{\Delta}[B_1\Delta_1 - B_2\Delta_2 + B_3\Delta_3 - \ldots - (-1)^{m+1}B_{m+1}\Delta_{m+1}].$$

4. On peut se proposer de simplifier l'expression de V, *d'une manière générale*, en diminuant le nombre des sections dont l'aire doit être calculée ; il suffit de disposer des nombres (arbitraires dans des limites déterminées) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ de manière à rendre nuls les coefficients des nombres représentant les sections qu'on ne veut pas calculer ; *d'une manière particulière à un volume*, en disposant des mêmes nombres pour introduire des sections plus faciles à calculer.

Nous allons nous occuper du premier genre de simplification en faisant varier m, degré de la fonction qui représente la section, à partir de 2 ; quant au second genre de simplification, il se présentera naturellement dans chaque cas particulier. Nous devons encore observer que toute expression de volume se rapportant à une section de degré m se rapporte également à toute section de degré inférieur.

5. *Cas où* $m = 2$. — On a dans ce cas

$$V = \frac{h}{\Delta}(B_1\Delta_1 - B_2\Delta_2 + B_3\Delta_3).$$

Le déterminant Δ est décomposable en facteurs du

premier degré; on a

$$\Delta = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

ou

$$\Delta = [\alpha_3^2 - (\alpha_2 + \alpha_1)\alpha_3 + \alpha_2\alpha_1](\alpha_2 - \alpha_1);$$

de cette égalité on déduit

$$\Delta_3 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_2\alpha_1\right](\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\Delta_2 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_1) + \alpha_3\alpha_1\right](\alpha_3 - \alpha_1),$$

$$\Delta_1 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_2) + \alpha_3\alpha_2\right](\alpha_3 - \alpha_2).$$

Posons $\Delta_3 = 0$; nous ne pouvons satisfaire à cette équation par la supposition $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ pour un motif donné, mais nous pouvons y satisfaire d'une infinité de manières par les valeurs inégales et finies de α_1, α_2 vérifiant l'équation $\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0$. Acceptons un tel système de valeurs de α_1, α_2; nous n'altérerons pas les valeurs de Δ_1, Δ_2, en retranchant du premier facteur qui entre dans leur composition le polynôme nul $\alpha_2\,\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3}$; ils deviendront alors

$$\Delta_1 = [\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_1) - \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)](\alpha_3 - \alpha_2)$$
$$= \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\right)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1),$$

$$\Delta_2 = [\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2) - \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2)](\alpha_3 - \alpha_1)$$
$$= \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1).$$

Substituons ces valeurs de Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 dans l'expression de V; nous aurons après simplification, et pour tous les systèmes de valeurs inégales et finies de α_1, α_2 vérifiant

$$\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0,$$

$$V = h\,\frac{B_1(\alpha_2 - \frac{1}{2}) - B_2(\alpha_1 - \frac{1}{2})}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

On peut donc évaluer le volume d'une infinité de manières au moyen de deux sections, et l'on ne peut, en général, l'évaluer au moyen d'un nombre moindre, car, si l'on voulait rendre nul l'un des coefficients de B_1, B_2, l'autre deviendrait infini.

Comme expression particulière, nous pouvons prendre deux sections à égale distance des bases ou, ce qui revient au même, du milieu de la hauteur; il suffit de prendre les valeurs de α_2, α_1 satisfaisant à la condition $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ ou $\alpha_2 + \alpha_1 = 1$ et à l'équation $\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0$. On en déduit $\alpha_2\alpha_1 = \frac{1}{6}$; α_2 et α_1 seront alors les racines de l'équation du second degré

$$X^2 - X + \frac{1}{6} = 0,$$

d'où

$$\alpha_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \alpha_1 - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \quad \text{et} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Si nous désignons par B_1, B_2 les aires des sections faites dans la surface parallèlement aux bases et à une distance du milieu de la base égale à $\frac{h}{2\sqrt{3}}$, nous aurons

$$V = h\,\frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Ces expressions, tant générale que particulière, conviennent aux troncs de pyramide et de cône à bases parallèles, au segment sphérique, au volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre, à un volume limité par une surface du second ordre et

deux plans parallèles coupant la surface suivant des sections elliptiques, enfin, comme nous l'établirons à la fin du présent article, au volume compris entre deux plans parallèles et une surface réglée admettant pour directrices deux lignes planes fermées situées dans ces plans et une troisième directrice quelconque, pourvu que la génératrice reprenne sa première position quand ses points de rencontre avec les deux directrices planes ont parcouru en même temps et en entier ces deux directrices.

6. *Cas où* $m = 3$. — Dans ce cas

$$V = \frac{-h}{\Delta}(B_1\Delta_1 - B_2\Delta_2 + B_3\Delta_3 - B_4\Delta_4).$$

Décomposant Δ en facteurs du premier degré, on a

$$\Delta = (\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

ou

$$\Delta = [\alpha_4^3 - (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1)\alpha_4^2 + (\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1)\alpha_4 - \alpha_3\alpha_2\alpha_1]$$
$$\times (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1);$$

on en déduit

$$\Delta_4 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) - \alpha_3\alpha_2\alpha_1\right](\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\Delta_3 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) - \alpha_4\alpha_2\alpha_1\right](\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\Delta_2 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_1) + \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1) - \alpha_4\alpha_3\alpha_1\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1),$$

$$\Delta_1 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2) + \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2) - \alpha_4\alpha_3\alpha_2\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2).$$

Nous pouvons simplifier l'expression de V en égalant le premier facteur de Δ_4 à zéro, et, comme ce facteur renferme trois indéterminées, nous pouvons satisfaire à cette condition d'une infinité de manières. Considérant un système de valeurs finies de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ telles que deux quelconques d'entre elles soient distinctes et qui satisfassent à l'équation

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) - \alpha_3\alpha_2\alpha_1 = 0,$$

nous pouvons, sans altérer les valeurs de Δ_1, Δ_2, Δ_3, retrancher du premier facteur de chacun d'eux le polynôme nul premier membre de l'équation précédente; on trouve ainsi, après réduction,

$$\Delta_1 = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_2) - \alpha_3\alpha_2\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2),$$

$$\Delta_2 = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_1) - \alpha_3\alpha_1\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1),$$

$$\Delta_3 = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) - \alpha_2\alpha_1\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Remplaçant, dans l'expression de V, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ par leurs valeurs, on trouve après réduction

$$\begin{aligned} V = \frac{h}{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} \Big\{ & B_1\left[\alpha_3\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_2) + \frac{1}{3}\right](\alpha_3 - \alpha_2) \\ & - B_2\left[\alpha_3\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_1) + \frac{1}{3}\right](\alpha_3 - \alpha_1) \\ & + B_3\left[\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\quad + \alpha_1) + \frac{1}{3}\right](\alpha_2 - \alpha_1)\Big\}. \end{aligned}$$

Cette égalité a lieu pour tous les systèmes de valeurs finies de α_1, α_2, α_3, telles que deux quelconques d'entre elles soient distinctes, ces variables satisfaisant à l'égalité

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0.$$

Si l'on fait dans cette égalité $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, on en déduit

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 1.$$

Le volume peut donc s'évaluer au moyen de la section parallèle aux bases menée par le milieu de la hauteur et de deux autres sections parallèles à celle-là et qui en soient équidistantes ; en particulier, on peut associer à la section moyenne les deux bases extrêmes en faisant $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1$, et l'on retrouve pour expression de V dans ces hypothèses

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3),$$

formule due à Maclaurin (*Fluxions*, n° 848 ; 1742).

On peut simplifier encore l'expression de V en égalant à zéro le coefficient de B_3 en même temps que le premier facteur de Δ_4 ; on arrive ainsi à déterminer α_1 et α_2 par les deux équations

$$\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0,$$

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) - \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} = 0.$$

En tenant compte de la première, la seconde se réduit à

$$\frac{1}{2}\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} = 0.$$

De ces deux équations on déduit facilement

$$\alpha_2 + \alpha_1 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_2\alpha_1 = \frac{1}{6}.$$

On peut alors réduire la précédente expression générale

de V par le calcul qu'on a fait dans le cas où $m = 2$, et l'on trouve la même expression

$$V = h \times \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Donc, dans le cas où $m = 3$, on peut encore exprimer le volume au moyen de deux sections seulement; mais cette réduction ne peut se faire que d'une seule manière, tandis que dans le cas où $m = 2$ elle est possible d'une infinité de manières. Les deux sections au moyen desquelles on peut exprimer le volume dans le cas où $m = 3$ sont encore situées à une distance du milieu de la hauteur égale à $\frac{h}{2\sqrt{3}}$. Le volume, dans le cas où $m = 3$, ne peut s'exprimer au moyen de moins de deux sections, car, après avoir réduit à deux le nombre de ces sections, les nombres qui les représentent sont affectés de coefficients déterminés.

7. Quel que soit m, on peut faire des transformations analogues à celles que nous venons de pratiquer et réduire le nombre des sections à calculer. Dans le cas général, le déterminant Δ se décompose en facteurs du premier degré, et l'on a toujours

$$\begin{aligned} \Delta = & (\alpha_{m+1} - \alpha_m)(\alpha_{m+1} - \alpha_{m-1}) \ldots \\ & \times (\alpha_{m+1} - \alpha_1)(\alpha_m - \alpha_{m-1}) \ldots (\alpha_m - \alpha_1) \ldots (\alpha_2 - \alpha_1); \end{aligned}$$

on peut effectuer le produit des m premiers facteurs d'après une loi connue et déduire du résultat les expressions de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{m+1}$, ordonnés suivant les éléments de la dernière ligne. Dans cet état, chacun des déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{m+1}$ est le produit d'un polynôme, qui se déduit du produit effectué dans Δ, par une suite de facteurs binômes; on ne peut égaler à zéro ces facteurs binômes, car il en résulterait l'égalité de deux des

rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1}$, et l'on a vu que cette égalité n'était pas permise; mais on peut égaler à zéro un ou plusieurs des facteurs polynômes, en observant que, si deux d'entre eux sont nuls, ils doivent l'être indépendamment de toute valeur particulière attribuée à une variable non commune.

En effet, chacun de ces facteurs se compose de m des $m+1$ rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$; deux d'entre eux ne diffèrent que par une de ces variables, toutes les autres étant communes et y entrant de la même manière. Ils sont du premier degré par rapport à chacune des variables qui y entrent; donc ils auront la forme $\alpha_l M + N$, $\alpha_k M + N$; ils ne peuvent donc être nuls en même temps que par les suppositions $M = 0$, $N = 0$, sans quoi de l'égalité à zéro de ces facteurs on déduirait $\alpha_l = \alpha_k$, ce qui n'est pas permis.

La même observation s'applique à deux des équations de la forme $M = 0$, $N = 0$, si leurs premiers membres ne diffèrent que par un des $m+1$ rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$, et que les rapports communs y figurent de la même manière.

Nous allons éclaircir cela par quelques applications.

8. Proposons-nous de réduire au moindre nombre possible le nombre des sections nécessaires pour calculer le volume V dans le cas où $m = 4$. Désignant par $F_1, F_2, \ldots$ les facteurs polynômes qui figurent respectivement dans $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, et qu'on peut rendre nuls, on a

$$\begin{aligned} F_1 = {} & \alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_3\alpha_2 + \alpha_4\alpha_3\alpha_1 + \alpha_4\alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2\alpha_1) \\ & + \frac{1}{3}(\alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) \\ & - \frac{1}{4}(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

$$F_4 = \alpha_5\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_3\alpha_2 + \alpha_5\alpha_3\alpha_1 + \alpha_5\alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2\alpha_1)$$
$$+ \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_3 + \alpha_5\alpha_2 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1)$$
$$- \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{5},$$

$$F_3 = \alpha_5\alpha_4\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_4\alpha_2 + \alpha_5\alpha_4\alpha_1 + \alpha_5\alpha_2\alpha_1 + \alpha_4\alpha_2\alpha_1)$$
$$+ \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_4 + \alpha_5\alpha_2 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1)$$
$$- \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{5},$$

$$F_2 = \alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_4\alpha_3 + \alpha_5\alpha_4\alpha_1 + \alpha_5\alpha_3\alpha_1 + \alpha_4\alpha_3\alpha_1)$$
$$+ \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_4 + \alpha_5\alpha_3 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1)$$
$$- \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha^1) + \frac{1}{5},$$

$$F_1 = \alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_4\alpha_3 + \alpha_5\alpha_4\alpha_2 + \alpha_5\alpha_3\alpha_2 + \alpha_4\alpha_3\alpha_2)$$
$$+ \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_4 + \alpha_5\alpha_3 + \alpha_5\alpha_2 + \alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2)$$
$$- \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2) + \frac{1}{5}.$$

On peut égaler à zéro les facteurs F_5 et F_4, et pour cela, d'après le numéro précédent, il faut et il suffit que le coefficient de α_4 et le terme indépendant pris dans F_5 soient séparément nuls ; on est ainsi conduit aux deux équations

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{4}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{5} = 0.$$

Ces deux équations, renfermant trois variables, admettent une infinité de solutions communes, et permettent

de réduire à trois et d'une infinité de manières le nombre des sections nécessaires pour évaluer V dans le cas $m = 4$. Si en particulier nous posons $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, ces équations se réduisent à

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 1,$$

$$\alpha_1 \alpha_3 - (\alpha_1 + \alpha_3) + \frac{9}{10} = 0,$$

ou, eu égard à la précédente,

$$\alpha_1 \alpha_3 = \frac{1}{10}.$$

α_1, α_3 sont donc, dans ce cas particulier, racines de l'équation du second degré $X^2 - X + \frac{1}{10} = 0$, et définissent deux sections équidistantes du milieu de la hauteur et dont la distance à ce point est $\frac{h}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$. Pour qu'on pût réduire à deux le nombre des sections nécessaires pour évaluer le volume V dans ce cas, il faudrait qu'on pût rendre nuls trois des facteurs, par exemple F_5, F_4 et F_3; ces équations exigent, d'après ce qu'on a vu au numéro précédent, qu'on puisse satisfaire aux six équations

$$\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_3 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1) + \frac{1}{4}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\alpha_4 \alpha_2 \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_4 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_4 \alpha_2 \alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_4 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1) + \frac{1}{4}(\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\alpha_5 \alpha_2 \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_5 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_5 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_5 \alpha_2 \alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_5 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1) + \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{5} = 0.$$

Or, d'après l'observation qui termine le numéro précédent, il faut et il suffit, pour satisfaire aux équations (1), (3), (5), de trouver des valeurs de α_1, α_2 vérifiant les deux équations

$$(7) \qquad \alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{1}{2}\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} = 0,$$

et il est également nécessaire et suffisant, pour satisfaire aux équations (2), (4), (6), que ces valeurs de α_1, α_2 vérifient

$$(9) \qquad \frac{1}{2}\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} = 0,$$

$$(10) \qquad \frac{1}{3}\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{4}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{5} = 0.$$

Dès lors, pour qu'on pût réduire à deux le nombre des sections nécessaires pour évaluer le volume V dans le cas où $m = 4$, il serait nécessaire et suffisant que les équations (7), (8) et (10) admissent une solution commune; or il est facile de voir qu'elles n'en ont pas : donc, dans le cas où $m = 4$, on ne peut évaluer V au moyen de moins de trois sections, et on l'évalue d'une infinité de manières au moyen de trois sections.

9. En reprenant un calcul analogue dans le cas où $m = 5$, on trouve que le volume peut aussi s'exprimer au moyen de la section menée par le milieu de la hauteur et de deux sections équidistantes et qui en sont situées à la distance $\frac{h}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$. Ces résultats font supposer : 1° que les sections équidistantes du milieu de la hauteur ont une importance particulière dans la réduction du nombre des sections; 2° que le volume s'exprime de la même

manière au moyen de ces sections quand le degré de la fonction qui les représente est de la forme $2n$ et de la forme $2n+1$; 3° que la section passant par le milieu de la hauteur figure ou ne figure pas dans l'expression du volume suivant que le degré de la fonction qui représente la section est de la forme $4n$ ou de la forme $4n+1$. Nous allons mettre ces propositions en évidence. Conservons les notations précédentes sauf l'exception suivante : nous supposerons que l'aire de la section est représentée par $f(x)$, x étant compté à partir du milieu de la hauteur positivement dans un sens et négativement dans l'autre ; nous désignerons la hauteur distance des plans parallèles extrêmes par $2h$; enfin nous désignerons par B_k et B_{-k} les nombres qui représentent les sections dont la distance au milieu de la hauteur est $\alpha_k h$ ou $-\alpha_k h$.

D'après cela et $2n$ étant le plus grand multiple de 2 contenu dans le degré m de la fonction représentant la section, nous aurons

$$B_k = a + a_1\alpha_k h + a_2\alpha_k^2 h^2 + \ldots + a_m\alpha_k^m h^m,$$

$$B_{-k} = a - a_1\alpha_k h + a_2\alpha_k^2 h^2 - \ldots \pm a_m\alpha_k^m h^m;$$

ajoutant et réduisant,

$$\frac{B_k + B_{-k}}{2} = a + a_2^2\alpha_k^2 h^2 + \ldots + a_{2n}\alpha_k^{2n} h^{2n}.$$

D'autre part, si nous désignons par V_1 la partie du volume située du côté des x positifs et par V_2 la partie située du côté des x négatifs, $V_1 + V_2$ étant égal à V, nous aurons

$$\frac{V_1}{h} = a + a_1\frac{h}{2} + a_2\frac{h^2}{3} + \ldots + a_m\frac{h^m}{m+1},$$

$$\frac{V_2}{h} = a - a_1\frac{h}{2} + a_2\frac{h^2}{3} + \ldots \pm a_m\frac{h^m}{m+1},$$

d'où, ajoutant,

$$\frac{V}{2h} = a + a_2\frac{h^2}{3} + \ldots + a_{2n}\frac{h^{2n}}{2n+1}.$$

Distinguons actuellement deux cas suivant que n est de l'une des formes $2p$ ou $2p+1$.

Première forme : $n=2p+1$, ou $m=4p+2$ ou $4p+3$. Nous aurons les égalités

$$\frac{B_1+B_{-1}}{2} = a + a_2\alpha_1^2 h^2 + a_4\alpha_1^4 h^4 + \ldots + a_{2n}\alpha_1^{2n} h^{2n},$$

$$\frac{B_2+B_{-2}}{2} = a + a_2\alpha_2^2 h^2 + a_4\alpha_2^4 h^4 + \ldots + a_{2n}\alpha_2^{2n} h^{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{B_{n+1}+B_{-(n+1)}}{2} = a + a_2\alpha_{n+1}^2 h^2 + a_4\alpha_{n+1}^4 h^4 + \ldots + a_{2n}\alpha_{n+1}^{2n} h^{2n},$$

$$\frac{V}{2h} = a + a_2\frac{h^2}{3} + a_4\frac{h^4}{5} + \ldots + a_{2n}\frac{h^{2n}}{2n+1}.$$

Ces égalités sont au nombre de $n+2$ et nous avons à éliminer entre elles les $n+1$ inconnues a, $a_2h^2, \ldots$, $a_{2n}h^{2n}$; le résultat de l'élimination est l'égalité à zéro du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{B_1+B_{-1}}{2} & 1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 & \ldots & \alpha_1^{2n} \\ \frac{B_2+B_{-2}}{2} & 1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 & \ldots & \alpha_2^{2n} \\ \ldots\ldots & . & .. & .. & \ldots & \ldots \\ \frac{B_{n+1}+B_{-(n+1)}}{2} & 1 & \alpha_{n+1}^2 & \alpha_{n+1}^4 & \ldots & \alpha_{n+1}^{2n} \\ \frac{V}{2h} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \ldots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

De cette égalité on peut tirer la valeur de V, quelsque soient les rapports α_1, $\alpha_2 \ldots$, α_{n+1}, pourvu qu'on ne leur attribue que des valeurs finies et que deux d'entre eux ne soient pas égaux entre eux. Le volume sera ainsi exprimé au moyen de $2(n+1)$ sections, et, comme $m=2n$ ou

$2n+1$, il sera exprimé au moyen de $m+2$ ou de $m+1$ sections ; on pourra, du reste, faire disparaître un certain nombre de ces sections par couples en rendant nuls leurs coefficients, comme nous l'avons fait dans les numéros précédents.

Seconde forme : $n=2p$, ou $m=4p$ ou $4p+1$. Nous aurons les égalités suivantes, en observant que a est le nombre qui représente la section menée par le milieu de la hauteur :

$$\frac{B_1+B_{-1}}{2}-a=a_2\alpha_1^2h^2+a_4\alpha_1^4h^4+\ldots+a_{2n}\alpha_1^{2n}h^{2n},$$

$$\frac{B_2+B_{-2}}{2}-a=a_2\alpha_2^2h^2+a_4\alpha_2^4h^4+\ldots+a_{2n}\alpha_2^{2n}h^{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{B_n+B_{-n}}{2}-a=a_2\alpha_n^2h^2+a_4\alpha_n^4h^4+\ldots+a_{2n}\alpha_n^{2n}h^{2n},$$

$$\frac{V}{2h}-a=a_2\frac{h^2}{3}+a_4\frac{h^4}{5}+\ldots+a_{2n}\frac{h^{2n}}{2n+1}.$$

Ces égalités sont au nombre de $n+1$ et nous avons à éliminer entre elles les n inconnues $a_2h^2, a_4h^4, \ldots, a_{2n}h^{2n}$; le résultat de cette élimination est l'égalité à zéro du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{B_1+B_{-1}}{2}-a & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 & \ldots & \alpha_1^{2n} \\ \frac{B_2+B_{-2}}{2}-a & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 & \ldots & \alpha_2^{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{B_n+B_{-n}}{2}-a & \alpha_n^2 & \alpha_n^4 & \ldots & \alpha_n^{2n} \\ \frac{V}{2h}-a & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \ldots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix}=0.$$

Cette égalité définit le volume V au moyen de $2n+1$

sections, ou, comme m est égal à $2n$ ou $2n+1$, le nombre des sections nécessaires est peut-être représenté par $m+1$ ou m, nombre qu'on peut réduire en disposant des rapports variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

10. Appliquant ces considérations au cas où m est égal à 4 ou à 5, nous nous trouvons dans le cas de la seconde forme du numéro précédent; dans ce cas, $n = 2$, et le volume sera défini par l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{B_1 + B_{-1}}{2} - a & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 \\ \dfrac{B_2 + B_{-2}}{2} - a & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 \\ \dfrac{V}{2h} - a & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\alpha_2^2 \left(\frac{B_1 + B_{-1}}{2} - a \right) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix}$$

$$- \alpha_1^2 \left(\frac{B_2 + B_{-2}}{2} - a \right) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \left(\frac{V}{2h} - a \right) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = 0;$$

égalant à zéro le coefficient de $\dfrac{B_2 + B_{-2}}{2} - a$, nous en déduisons $\alpha_1^2 = \dfrac{3}{5}$; remplaçant α_1^2 par cette valeur, il vient

$$\alpha_2^2 \left(\frac{B_1 + B_{-1}}{2} - a \right) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} + \frac{3}{5} \alpha_2^2 \left(\frac{V}{2h} - a \right) \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{3}{5} \\ 1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = 0;$$

simplifiant,

$$\left(\frac{B_1 + B_{-1}}{2} - a \right) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} - \frac{9}{5} \left(\frac{V}{2h} - a \right) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$B_1 + B_{-1} - 2a - \frac{9}{5}\frac{V}{h} + \frac{18}{5}a = 0,$$

$$V = \frac{h}{9}(5B_1 + 8a + 5B_{-1}),$$

où il faut observer que h n'est que la moitié de la hauteur; cette expression confirme bien les résultats précédents.

11. Faisons encore l'application au cas où m est égal à 6 ou à 7. Nous sommes dans le cas de la deuxième forme du n° 9; n étant égal à 3, le volume est donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{B_1+B_{-1}}{2} & 1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 & \alpha_1^6 \\ \frac{B_2+B_{-2}}{2} & 1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 & \alpha_2^6 \\ \frac{B_3+B_{-3}}{2} & 1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^4 & \alpha_3^6 \\ \frac{B_4+B_{-4}}{2} & 1 & \alpha_4^2 & \alpha_4^4 & \alpha_4^6 \\ \frac{V}{2h} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons, pour abréger, les quatre premiers éléments de la première colonne par D_1, D_2, D_3, D_4, respectivement, et conservons pour les déterminants mineurs une notation analogue à celle que nous avons employée dans les huit premiers numéros; l'équation pourra s'écrire

$$D_1\Delta_1 - D_2\Delta_2 + D_3\Delta_3 - D_4\Delta_4 + \frac{V}{2h}\Delta = 0.$$

Δ est décomposable en facteurs et peut se mettre sous la forme

$$\Delta = (\alpha_4^2 - \alpha_3^2)(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)(\alpha_4^2 - \alpha_1^2)(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2),$$

ou

$$\Delta = [\alpha_4^6 - (\alpha_3^2+\alpha_2^2+\alpha_1^2)\alpha_4^4 + (\alpha_3^2\alpha_2^2+\alpha_3^2\alpha_1^2+\alpha_2^2\alpha_1^2)\alpha_4^2 - \alpha_3^2\alpha_2^2\alpha_1^2](\alpha_3^2-\alpha_2^2)(\alpha_3^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-\alpha_1^2)$$

On en déduit

$$\Delta_4 = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5}(\alpha_3^2+\alpha_2^2+\alpha_1^2) + \frac{1}{3}(\alpha_3^2\alpha_2^2+\alpha_3^2\alpha_1^2+\alpha_2^2\alpha_1^2) - \alpha_3^2\alpha_2^2\alpha_1^2\right](\alpha_3^2-\alpha_2^2)(\alpha_3^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-\alpha_1^2)$$

$$\Delta_3 = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5}(\alpha_4^2+\alpha_2^2+\alpha_1^2) + \frac{1}{3}(\alpha_4^2\alpha_2^2+\alpha_4^2\alpha_1^2+\alpha_2^2\alpha_1^2) - \alpha_4^2\alpha_2^2\alpha_1^2\right](\alpha_4^2-\alpha_2^2)(\alpha_4^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-\alpha_1^2)$$

$$\Delta_2 = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5}(\alpha_4^2+\alpha_3^2+\alpha_1^2) + \frac{1}{3}(\alpha_4^2\alpha_3^2+\alpha_4^2\alpha_1^2+\alpha_3^2\alpha_1^2) - \alpha_4^2\alpha_3^2\alpha_1^2\right](\alpha_4^2-\alpha_3^2)(\alpha_4^2-\alpha_1^2)(\alpha_3^2-\alpha_1^2)$$

$$\Delta_1 = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5}(\alpha_4^2+\alpha_3^2+\alpha_2^2) + \frac{1}{3}(\alpha_4^2\alpha_3^2+\alpha_4^2\alpha_2^2+\alpha_3^2\alpha_2^2) - \alpha_4^2\alpha_3^2\alpha_2^2\right](\alpha_4^2-\alpha_3^2)(\alpha_4^2-\alpha_2^2)(\alpha_3^2-\alpha_2^2)$$

Égalant à zéro Δ_4 et Δ_3, on en déduit

$$\alpha_2^2\alpha_1^2 - \frac{1}{3}(\alpha_2^2+\alpha_1^2) + \frac{1}{5} = 0,$$

$$\frac{1}{3}\alpha_2^2\alpha_1^2 - \frac{1}{5}(\alpha_2^2+\alpha_1^2) + \frac{1}{7} = 0;$$

on en tire

$$\alpha_2^2\,\alpha_1^2 = \frac{3}{35},$$

$$\alpha_2^2+\alpha_1^2 = \frac{6}{7};$$

α_2^2 et α_1^2 sont alors racines de l'équation du second degré

$$X^2 - \frac{6}{7}X + \frac{3}{35} = 0,$$

d'où

$$X = \frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Les valeurs de X sont réelles et positives, et en conséquence nous trouverons pour α_1, α_2 des valeurs acceptables ; le volume V s'exprimera alors au moyen de quatre sections, deux à deux équidistantes du milieu de la hauteur.

En réduisant les expressions de Δ_1, Δ_2 d'après des procédés analogues à ceux que nous avons précédemment employés, on trouve pour valeur réduite de V, en prenant $\alpha_1^2 = \frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$ et $\alpha_2^2 = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$,

$$V = h\,\frac{(B_1 + B_{-1})(18 + \sqrt{30}) + (B_2 + B_{-2})(18 - \sqrt{30})}{36},$$

h représentant toujours la moitié de la hauteur.

12. Nous avons énoncé à la fin du n° 5 une proposition qui devient évidente au moyen du théorème suivant :

Si l'on coupe une surface réglée, à directrices quelconques, par un plan déterminant une section fermée dans la surface, l'aire de cette section est une fonction rationnelle du second degré de la distance du plan sécant à un point fixe de l'espace.

Rapportons la figure à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, se coupant au point fixe O, et tels que le plan XOY soit parallèle au plan sécant SMN. Coupons la figure par un plan fixe TA_1B_1 parallèle à XOY. Soient AA_1, BB_1 deux positions voisines de la génératrice limitée aux plans XOY, TA_1B_1 ; projetons-les orthogonalement sur le plan XOY suivant Aa_1, Bb_1 : les points M, N, où elles sont rencontrées par le plan sécant, se pro-

jettent en m, n sur Aa_1 et Bb_1. Il est évident qu'on a les égalités de rapport suivantes :

$$\frac{Am}{ma_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{OS}{ST} = \frac{BN}{NB_1} = \frac{Bn}{nb_1}.$$

Désignons par $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta, \gamma_1, \delta_1, x, y, x_1, y_1$, les distances à OY et à OX des points A, a_1, B, b_1, m, n, les huit premières étant connues et résultant de la nature de la surface, les quatre dernières restant à déterminer. Désignons encore OT par h et OS par z. Il résulte des égalités de rapport précédentes $\frac{Am}{ma_1} = \frac{Bn}{nb_1} = \frac{z}{h-z}$; d'après un théorème connu, on en déduit

$$x = \frac{\alpha(h-z) + \alpha_1 z}{h}, \quad y = \frac{\beta(h-z) + \beta_1 z}{h},$$

$$x_1 = \frac{\gamma(h-z) + \gamma_1 z}{h}, \quad y_1 = \frac{\delta(h-z) + \delta_1 z}{h}.$$

Si nous nous reportons au triangle Omn, égal au triangle SMN, on voit qu'il est équivalent à

$$\frac{1}{2}[xy + (y + y_1)(x_1 - x) - x_1 y_1]$$

ou, toutes réductions faites, à $\frac{1}{2}(yx_1 - xy_1)$; remplaçant x, y, x_1, y_1 par leurs valeurs, on a

$$\begin{aligned}SMN = Omn = \frac{1}{2h^2}\{&[\beta(h-z) + \beta_1 z][\gamma(h-z) + \gamma_1 z] \\ &- [\alpha(h-z) + \alpha_1 z][\delta(h-z) + \delta_1 z]\}.\end{aligned}$$

La surface SMN est donc une fonction rationnelle et du second degré de z, distance de son plan au point O.

Si maintenant nous supposons qu'on ait inscrit, dans la courbe de section de la surface réglée par le plan

SMN, un polygone d'un très grand nombre de côtés très petits, sa surface pourra être considérée comme la somme algébrique d'autant de triangles qu'il aura de côtés, et, comme la surface de chacun de ces triangles est une fonction du second degré de z, il en sera de même de l'aire du polygone et de sa limite, qui est l'aire de la section faite dans la surface.

N. B. — Il est presque superflu de remarquer que les calculs que nous venons d'appliquer au calcul d'un volume limité à deux plans parallèles et à une surface interceptant sur des plans parallèles à ceux-là une aire qui est représentée par une fonction rationnelle de la distance à un point fixe du plan de la section s'appliquent également, sans modification sensible, à l'évaluation d'une aire plane limitée par deux droites parallèles et par une courbe ou un système de courbes, quand la corde interceptée par cette courbe ou ce système de courbes sur une parallèle variable aux deux premières a une longueur représentée par une fonction rationnelle de la distance de cette droite variable à un point du plan de l'aire considérée.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES EN 1879.

PREMIÈRE SESSION. — ÉPREUVES ÉCRITES.

I. — *Géométrie analytique.*

Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy ; sur Ox, un point A ; sur Oy, un point B. On considère toutes les hyperboles équilatères qui passent au point A et sont tangentes à l'axe Oy au point B.

1° Former l'équation générale de ces hyperboles équilatères.

2° Trouver le lieu des points de rencontre de la tangente en A à chacune de ces hyperboles, avec les parallèles, menées par l'origine, aux asymptotes de cette même hyperbole.

3° Le lieu précédent est une parabole P : former l'équation de l'axe et l'équation de la tangente au sommet de cette parabole P; construire ces droites et déterminer géométriquement la grandeur du paramètre de cette parabole.

4° Trouver le lieu du sommet de la parabole P, quand le point A se déplace sur Ox, le point B restant fixe.

II. — *Géométrie descriptive.*

Hyperboloïde de révolution entaillé par un cône. — L'axe zz' de l'hyperboloïde est vertical, à $0^m,100$ du plan vertical et au milieu de la feuille; le cercle de gorge C, C', dont la cote vaut $0^m,080$, a $0^m,030$ de rayon, et les génératrices rectilignes de la surface font avec l'horizon un angle de 45°.

Le cône, dont le sommet s, s' se trouve dans le plan de profil conduit par l'axe zz', à $0^m,050$ en avant de cet axe et à $0^m,040$ au-dessus du cercle de gorge, a pour trace horizontale le cercle ω décrit du point z comme centre, avec un rayon égal à $0^m,070$. On demande de représenter l'hyperboloïde, supposé plein et limité, d'une part, au plan horizontal P', à la cote $0^m,190$, de l'autre, au plan horizontal de projection, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection des surfaces données et la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.

Titre intérieur : Hyperboloïde entaillé par un cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,228$ du petit côté supérieur.

III. — *Triangle.*

Étant donnés les trois côtés a, b, c d'un triangle ABC, calculer les trois angles et l'aire du triangle :

$$a = 3457^m,205,$$
$$b = 5819^m,798,$$
$$c = 7005^m,002.$$

IV. — *Physique et Chimie.*

1. Un tube barométrique, terminé par un renflement cylindrique de $0^m,05$ de hauteur, plonge dans une cuve à mercure. Il renferme de l'air raréfié qui occupe exactement le volume du renflement, lorsque la différence de niveau entre les deux surfaces de mercure est de $0^m,12$ et lorsque la pression atmosphérique est de $0^m,75$.

On soulève verticalement ce tube jusqu'à ce que la section inférieure du renflement soit à $0^m,43$ au-dessus du niveau, supposé constant, du mercure dans la cuve. Quelle est alors la différence de niveau des deux surfaces de mercure dans le tube et dans la cuve ?

Le rapport des rayons des deux parties du tube est de 1 à 2.

2. Préparation et propriétés chimiques de l'acide sulfhydrique.

Calculer la densité théorique de la vapeur de soufre, connaissant la composition de l'acide sulfhydrique.

Densité de l'hydrogène .... $\delta = 0,0692$
Densité de l'acide sulfhydrique. $\delta' = 1,1912$

SECONDE SESSION. — ÉPREUVES ÉCRITES.

I. — *Géométrie analytique.*

On donne un carré PQP′Q′, dont la demi-diagonale $OP = OQ = n$.

1° On demande d'écrire l'équation générale des coniques tangentes aux quatre côtés de ce carré, en distinguant les cas où ce sont des ellipses, des hyperboles ayant leurs sommets sur OPx, des hyperboles ayant leurs sommets sur OQy ou enfin des paraboles.

2° On considère l'une quelconque des ellipses inscrites dans le carré; sur son demi-axe OA, comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle OAs, dont le côté As a une longueur fixe donnée $As = K$; sur la direction de l'axe OA, on prend une longueur $OS = Os$ et l'on construit une hyperbole équilatère ayant son centre en O et l'un de ses sommets en S; cette hyperbole coupe l'ellipse considérée au point M. On demande d'écrire l'équation du lieu des points M.

3° On discutera la nature et la position de ce lieu, suivant la grandeur de la ligne donnée K et suivant que OA est le demi-grand axe ou le demi-petit axe de l'ellipse considérée.

II. — *Géométrie descriptive.*

Solide commun à deux cônes de révolution. — Les angles générateurs des cônes sont égaux entre eux et valent 45°. L'axe de la première surface est vertical et au milieu de la feuille; la cote du sommet est égale à $0^m,115$ et l'axe est à $0^m,105$ en avant du plan vertical. Le second cône a pour axe l'une des génératrices de front du premier et pour cote du sommet $0^m,155$.

On demande de représenter le solide commun aux deux cônes, en limitant ce solide d'une part au plan

horizontal P′, à la cote $0^m,195$, de l'autre au plan horizontal de projection.

On indiquera à l'encre rouge les constructions relatives à la détermination d'un point quelconque de la ligne commune aux deux cônes et de la tangente à cette ligne au même point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.

Titre intérieur : Solide commun à deux cônes de révolution.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,222$ du petit côté inférieur.

III. — *Triangle.*

Étant donné, dans un triangle ABC,

$$a = 4257^m,54,$$
$$b = 354^m,682,$$
$$C = 64°42'25''4,$$

calculer les angles A, B, le côté c et l'aire du triangle.

IV. — *Physique et Chimie.*

1. Un flacon à large goulot contient de l'air sous la pression de 760^{mm}. Sa hauteur est de $0^m,20$ et celle du goulot de $0^m,08$.

On renverse ce flacon dans une cuve à mercure; on l'enfonce verticalement jusqu'à ce que la surface libre du mercure soit à $0^m,156$ du bord ab du goulot. Quelle est alors la différence de niveau des deux surfaces de mercure ?

Le rapport des sections du flacon et de son goulot est égal à 4.

2. Formules relatives à la préparation des acides du phosphore : PhO^5 ; $PhO^5, 3HO$; $PhO^5, 2HO$; PhO^6, HO.

Quel est le poids d'acide phosphorique ordinaire

(PhO^5, 3HO) que l'on peut obtenir au moyen de 500gr de phosphore?

Équivalents : $H = 1$, $O = 8$, $Ph = 32$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1336

(voir 2e série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. MORET-BLANC.

Deux droites g, g', contenant deux séries homographiques des points A, B, C, D, ... *et* A', B', C', D', ..., *sont données; les droites* AA', BB', CC', DD', ... *enveloppent une conique: quel est le lieu des milieux de ces droites?* (DROZ.)

Soit S un point quelconque du plan; les couples de droites SA, SA', ..., SB, SB', ... forment deux faisceaux homographiques dont les deux rayons doubles sont les tangentes que l'on peut mener du point S à l'enveloppe des droites AA', BB', ... ; cette enveloppe est donc une courbe de seconde classe, et par conséquent une conique.

Prenons les droites g, g' pour axes de coordonnées, et soient α, β les distances de deux points homologues à l'origine. Ces points sont liés par une relation homographique de la forme

$$\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = 0.$$

Les coordonnées du milieu de la droite qui les joint sont

$$x = \frac{\alpha}{2}, \quad y = \frac{\beta}{2}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = 2x, \quad \beta = 2y.$$

En substituant ces valeurs dans la relation précédente, on a, pour l'équation du lieu des milieux des droites AA′, BB′, ...,

$$4xy + 2ax + 2by + c = 0.$$

Ce lieu est donc une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles aux droites g, g données.

Note. — Solution analogue de M. Ferdinando Pisani.

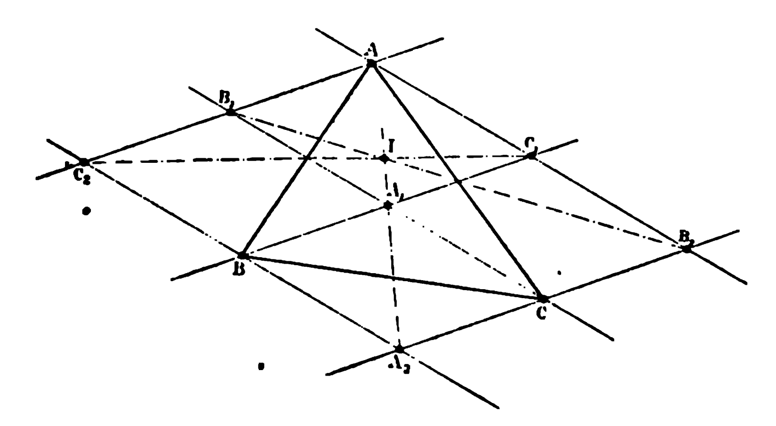
Question 1346

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 528);

PAR M. FAUQUEMBERGUE,

Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Par les trois sommets d'un triangle on mène trois droites parallèles à une même direction; puis, trois autres droites parallèles aussi à une autre direction; ces droites,



en se coupant, forment des parallélogrammes, parmi lesquels il y en a trois qui ont chacun un côté du triangle pour diagonale : démontrer que les secondes diago-

nales de ces trois parallélogrammes se coupent en un même point. (A. Boilleau.)

Soient ABC le triangle donné et BA_1CA_2, CB_1AB_2, AC_1BC_2 les trois parallélogrammes qui ont respectivement pour une de leurs diagonales les côtés BC, CA, AB. Menons les diagonales B_1B_2 et C_1C_2, qui se coupent en un point I.

Le triangle AC_1C_2, coupé par la transversale B_1IB_2, donne

$$IC_2 \times AB_1 \times B_2C_1 = IC_1 \times AB_2 \times B_1C_2,$$

ou, en remarquant que $AB_1 = A_1C_1$, $B_2C_1 = BA_2$, $AB_2 = A_2C_2$ et $B_1C_2 = A_1B$, on a

$$IC_2 \times A_1C_1 \times BA_2 = IC_1 \times A_2C_2 \times BA_1.$$

Cette relation, qui prouve que les trois points A_2, A_1, I sont en ligne droite, démontre le théorème.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Droz; Moret-Blanc; E. Pecquery, élève au lycée du Havre; J. Marchal; V. Robin, élève à Nancy; N. Goffart et F. Pisani.

CORRESPONDANCE.

Turin, le 1er mars 1880.

Monsieur le Rédacteur,

On attribue généralement à A.-J.-H. Vincent la priorité de la remarque relative à une propriété curieuse que présentent certaines équations irréductibles, lorsqu'on en développe les racines réelles en fraction continue, d'après la méthode de Lagrange. Cette propriété, aujourd'hui très connue par les belles recherches qu'elle a provoquées de la part de M. Lobatto et de M. Serret [1].

[1] *Journal de M. Liouville*, 1re série, t. IX, p. 177, et t. XV, p. 152. — Serret, *Algèbre supérieure*.

consiste en ce que, dans les équations dont il s'agit, deux ou plusieurs des fractions ainsi obtenues se trouvent terminées par les mêmes quotients incomplets. Dans sa *Note sur la résolution des équations numériques* (¹), Vincent signale cette particularité à l'égard des trois racines de l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$, et il ajoute : « Cette propriété... mériterait peut-être un examen spécial. » C'est le point de départ des travaux mentionnés.

Or il est juste d'ajouter aussi que, bien longtemps avant, la remarque en question avait déjà été faite par l'illustre Legendre, qui en avait fort bien entrevu toute la portée. Permettez-moi une courte citation à ce sujet.

Je me reporte au § XIV de l'*Essai sur la théorie des nombres* (édition de l'an VI, p. 133). Dans cet endroit, après avoir exposé la méthode de Lagrange pour le développement en fraction continue des racines réelles d'une équation d'un degré quelconque, Legendre fait d'abord l'application du procédé à l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

sur laquelle il signale expressément (p. 141 et 142) la circonstance de l'identité des quotients terminaux dont il est question. Après quoi on lit (p. 143) :

« Dans cet exemple, il est très remarquable qu'on trouve un rapport entre les trois racines au moyen duquel le développement de la première racine suffit pour donner celui des deux autres. Ce rapport est tel, que, si l'on appelle β une même racine de l'équation

$$z^3 - 3z^2 - 4z - 1 = 0 \quad (^2),$$

(¹) *Journal de M. Liouville*, 1re série, t. I, p. 341.

(²) Deuxième transformée relative au cas de la racine x comprise entre 1 et 2.

celle, par exemple, qui est entre 4 et 5, les trois racines de la proposée seront

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{2\beta + 1}{1 + \beta},$$

$$x_1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{\beta}} = \frac{\beta}{2\beta + 1},$$

$$x_2 = -1 - \frac{1}{\beta} = -\frac{1 + \beta}{\beta},$$

ou, si l'on appelle α la première valeur de x, les deux autres seront

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha - 1}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha},$$

$$x_2 = -\frac{1}{\alpha - 1}.$$

» Ces propriétés se vérifieraient aisément par les formules des sinus, puisqu'on a

$$x = 2\cos\frac{1}{7}\pi, \quad x_1 = 2\cos\frac{3}{7}\pi, \quad x_2 = -2\cos\frac{2}{7}\pi, \quad \ldots.$$

» Toutes les équations relatives à la division du cercle sont telles, qu'une de leurs racines suffit pour déterminer rationnellement toutes les autres; mais il en existe une infinité d'autres qui offrent la même facilité, et entre toutes ces équations on doit distinguer surtout celles dont une racine développée en fraction continue suffit pour donner le développement de toutes les autres racines. Cet objet paraît mériter l'attention des analystes, et il pourrait fournir des résultats intéressants. »

Les expressions sont formelles, comme on voit. Vient ensuite (p. 145, 146) la résolution, par fractions conti-

nues, de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$, dont les racines possèdent la propriété rappelée. Cette équation appartient directement à la classe étudiée par M. Lobatto, dont elle constitue le cas le plus simple.

Le passage que je viens de rapporter, reproduit dans les éditions subséquentes de la *Théorie des nombres*, ne paraît pas avoir été remarqué. La raison en doit être cherchée probablement en ce qu'un Ouvrage d'une telle portée, et dont la lecture exige au préalable une connaissance approfondie de l'Analyse algébrique, n'est pas consulté ordinairement dans le but d'y trouver une théorie passée depuis longtemps dans l'enseignement classique et consignée dans la plupart des Traités didactiques. Je ne m'arrête pas à la supposition que l'illustre auteur ait été devancé dans quelque publication antérieure, demeurée dans l'oubli.

D'après cela, Monsieur, il me semble établi que c'est bien décidément à Legendre que l'on doit la première remarque du fait analytique dont il s'agit. Cette observation, je dois le dire, n'aurait pas de raison d'être, si ce n'était la circonstance des importants travaux ultérieurs auxquels l'étude du fait signalé a donné naissance.

J'ignore si cette même observation a déjà été produite explicitement; elle est sans doute superflue pour les géomètres à qui les documents originaux et les travaux des maîtres sont familiers; mais il n'en est peut-être pas ainsi à l'égard de la généralité des lecteurs. Quelques expressions d'un article bibliographique des *Nouvelles Annales* (1) n'ont pas contribué, d'ailleurs, à rétablir la vérité historique sur le point en question. C'est ce qui m'a décidé à vous adresser cette Lettre, dont le contenu,

(1) 1re série, t. XIV, p. 407.

si cela vous semble opportun, pourrait être porté à la connaissance de vos lecteurs.

Agréez, monsieur le Rédacteur, l'expression de mes sentiments les plus respectueux et dévoués.

S. Réalis.

BIBLIOGRAPHIE.

Digression historique sur les quantités négatives, à propos de la Théorie des quantités négatives de M. *de Campou*, professeur au Collège Rollin. Paris, Gauthier-Villars, 1879.

Les quantités négatives sont sorties de la vaste et puissante conception de Viète. Lorsque le savant maître des requêtes de Paris (1540-1603) créa son fameux *Calcul littéral*, il jeta les bases d'une science immense, qui bientôt dût étendre son domaine sur toutes les branches des Mathématiques et fournir à chacune d'elles l'instrument à la fois le plus facile, le plus sûr et le plus universel qu'elle pût trouver, pour se diriger dans les champs variés de ses investigations, pour en activer et en féconder les produits. Viète fut le précurseur de Descartes, comme celui-ci, par la création de sa *Méthode analytique*, a été, pour ainsi dire, le promoteur de Newton.

C'est entre les mains du laborieux Poitevin ([1]) que les quantités, quelles qu'elles soient, sont désignées par une représentation générale et abstraite, reçoivent une existence figurée, qui permette d'ériger en formules les solutions de toute question, les propriétés de toute figure, les lois de tout phénomène physique. Ces formules elles-mêmes expriment les liens et déterminent les rapports qu'ont, avec les quantités qu'elles représentent, les données de la question, les parties de la figure et les circonstances du phénomène. Les formules obtenues sont toujours *générales;* elles s'étendent et s'appliquent à toute proposition qui roule sur des éléments analogues, sans être identiques. Le *Calcul* de Viète fournit en même temps les

---

([1]) François Viète est né à Fontenay-le-Comte, dans le bas Poitou.

lois de combinaison de ces formules; il en détermine l'étendue et en fait connaître toutes les propriétés. C'est ainsi que prit naissance la science des fonctions, dont la mine est inépuisable et qui, dans les temps récents, a pris les développements les plus surprenants.

Viéte, dans sa conception, a été inspiré avant tout par l'esprit de généralisation. Les *quantités négatives* durent forcément jaillir de sa création. Les anciens ont complètement ignoré l'existence de ces quantités, à sens opposés, qui se présentent sans cesse, non seulement en Géométrie, mais encore dans la science des nombres, dans celle des forces et du mouvement.

L'Algèbre, comme l'on sait, a pris naissance dans l'Inde, appelée, à juste titre, la *minière* des sciences. Brahmegupta, le plus éminent des mathématiciens hindous, résout les équations des deux premiers degrés dans le dix-huitième Chapitre (Ganita) de sa Brahma-Sidanta ([1]); mais, bien loin de donner une interprétation quelconque aux solutions *négatives*, il les rejette toujours comme inadmissibles; souvent même il les omet, sans y faire la moindre allusion.

De l'Inde, l'Algèbre pénétra chez les Arabes de Bagdad. Le plus célèbre de leurs analystes fut Mohammed ben Musa (814), qui avait publié un Traité d'Algèbre populaire à l'usage du commerce. La plupart des questions y sont résolues par les méthodes indiennes ([2]), mais les quantités négatives y sont complètement négligées.

Les Arabes ne faisaient usage que d'équations à termes positifs. Ils appelaient l'Algèbre *Al mokabela al dchebr;* le mot arabe *mokabela* était synonyme de *comparaison,* et voulait dire *art d'établir une comparaison, une équation.* Le mot *dchebr* indiquait l'opération par laquelle on faisait passer dans une équation un terme négatif d'un membre dans l'autre; ce terme, devenant ainsi positif, se trouvait restauré ou rétabli. Le nom *al dchebr*, et plus tard *al jebr,* avait été emprunté à l'art de redresser les membres démis. Aujourd'hui encore, en portugais et en espagnol, le chirurgien porte le nom d'*algebrista,* qu'avaient introduit dans la presqu'île ibérique les Maures de Cordoue ([3]).

C'est une chose bien curieuse, bien digne de remarque, que l'Al-

---

([1]) *Algebra, with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara,* translated by H.-T. Colebrooke. London, 1817, in-4, p. 5, 41, 50, 64 et 69.

([2]) Casiri, *Bibliotheca arabico-hispana,* t. I, p. 426 à 428, et t. II, p. 332.

([3]) Libri, *Histoire des Sciences mathématiques,* t. II, p. 79 et 80, et p. 506. note 6.

gèbre, la plus générale et la moins restrictive de toutes les sciences, doive précisément son nom à l'exclusion absolue des quantités négatives, qui forment cependant l'un de ses principaux éléments constitutifs.

L'Algèbre de Mohammed ben Musa a été transportée de l'Orient en Italie par Léonard de Pise en 1202 ([1]); elle y fut cultivée avec succès par Luc Paccioli (....-1494), Tartaléa (....-1559), Cardan (1501-1576) et Ferrari (1522-1565). Tartaléa parvint à résoudre les équations du troisième degré, et Ferrari trouva la solution des équations du quatrième degré. Cardan, le savant médecin de Bologne, est le premier qui ait connu les racines négatives, qu'il appelle *feintes*, sans toutefois en indiquer l'usage ([2]).

Les quantités négatives, toujours bannies de l'Algèbre ou rejetées comme insignifiantes, ont trouvé leur véritable interprète dans Albert Girard, géomètre flamand, qui est mort à Bruges en 1633. Il donne à ces quantités une existence propre et reconnaît le rôle qu'elles jouent en Algèbre et en Géométrie ([3]). Il considère le zéro comme la limite qui sépare les valeurs positives des quantités négatives, qu'il regarde comme inférieures à zéro. Dans la théorie des équations, il donne une égale importance aux racines positives et aux racines négatives et les range sur le même plan. Il les fait entrer de la même manière dans la composition des coefficients, qui affectent les termes successifs des équations.

C'est donc Albert Girard qui doit être regardé comme le fondateur, le véritable créateur de la théorie des quantités négatives. La féconde conception du géomètre de Bruges a rendu à la Science moderne les services les plus éclatants; elle a revêtu ses vastes conquêtes de ce précieux caractère de généralité, dont se trouvaient complètement dépourvus les travaux des anciens.

Ce faible aperçu suffit pour faire comprendre l'importance qui s'attache à tout Livre traitant spécialement des quantités négatives. L'Ouvrage de M. de Campou sera donc accueilli avec faveur tant par les professeurs que par les élèves. C'est un opuscule de quarante pages, rédigé avec clarté, et qui emprunte des exemples à toutes les branches des sciences exactes.

Cependant nous avons regretté de ne pas trouver établie, dès le

---

([1]) Ce géomètre, appelé aussi Fibonacci, nous a transmis l'Arithmétique supérieure des Arabes sous le nom d'*Algebra* et d'*Almacabala* (Chasles, *Aperçu historique*, note 12, p. 418).

([2]) *Cardani Ars magna*, f. 4, c. 1.

([3]) Girard, *Invention nouvelle en Algèbre*, 1629, in-4.

principe, l'existence de quantités qui doivent être prises avec le signe —. Au lieu d'avoir recours à des exemples dans la suite de l'Ouvrage, il eût été peut-être préférable de signaler au lecteur, en commençant, que les quantités concrètes ont généralement un double caractère : elles expriment d'une part une grandeur absolue et d'un autre côté une valeur qu'il faut compter dans un sens ou dans le sens opposé.

En réalité, les quantités négatives, considérées en elles-mêmes, échappent à toute interprétation ; elles ne prennent une existence certaine que si elles peuvent avoir des significations opposées. Tels sont les produits des spéculations commerciales, qui peuvent se traduire en bénéfice ou en perte ; telles sont les distances sur une route, qui peuvent se compter en avant ou en arrière d'un point de départ ; ou encore les époques chronologiques, qui peuvent être postérieures ou antérieures à l'origine des dates. Tels sont aussi les degrés thermométriques, qui s'étendent au-dessus et au-dessous du zéro. Il nous semble qu'en signalant l'existence de ce genre de grandeurs à sens opposés on aurait mis immédiatement en relief l'apparition forcée des quantités négatives dans le calcul ; on aurait ainsi montré que toute théorie *générale* ne saurait prendre les grandeurs que dans cette double acception.

Sous cette réserve, le travail de M. de Campou constitue un livre utile, qui a sa place marquée dans nos écoles.

GEORGES DOSTOR.

QUESTIONS.

1354. L'équation

$$(1)\qquad x^4 - (k - b + c)x^2 + (b - 2c)ax - ck = 0,$$

dans laquelle a, b, c, k sont des entiers plus grands que zéro et satisfaisant aux conditions

$$a^2 > k > (a-1)^2,$$
$$(a-1)b \geqq (a^2 - k - 1)c,$$

ou bien aux conditions

$$(a+1)^2 > k > a^2,$$
$$(a+1)b \geqq (k - a^2 + 1)c,$$

ne peut pas avoir trois racines entières. Si deux racines sont imaginaires, l'une au moins des racines réelles est incommensurable.

La même proposition subsiste à l'égard de l'équation

$$(2)\qquad x^4 - (k - b - c)x^2 + (b + 2c)ax + ck = 0,$$

dans laquelle les entiers a, b, c, k, tous plus grands que zéro, satisfont à l'un quelconque des quatre systèmes de conditions qui suivent, savoir :

$$1^\circ \quad \begin{cases} a^2 > c, \\ a^2 > k \geqq (a-1)^2; \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} c > a^2 > k, \\ (a+1)b \geqq (a^2 - k - 1)c; \end{cases}$$

$$3^\circ \quad (a+1)^2 \geqq k > a^2 > c;$$

$$4^\circ \quad \begin{cases} c > a^2, \\ k > a^2, \\ (a-1)b \geqq (k - a^2 + 1)c. \end{cases}$$

Dans chacun de ces cas, disons-nous, l'équation (2) a assurément deux racines réelles, dont l'une au moins est incommensurable. (S. RÉALIS.)

1355. Le volume du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, qui a pour sommets les pieds des hauteurs d'un tétraèdre donné ABCD, a pour expression

$$V \times \begin{vmatrix} 0 & \cos\eta & \cos\varepsilon & \cos\alpha \\ \cos\eta & 0 & \cos\delta & \cos\beta \\ \cos\varepsilon & \cos\delta & 0 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

en appelant V le volume du tétraèdre donné, et α, β, γ, δ, ε et η les angles dièdres de ce tétraèdre le long des arêtes BC, CA, AB, DA, DB et DC respectivement.

(GENTY.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XIX, 2e SÉRIE.)

Théorie des nombres.

Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie élémentaire.

Géométrie cinématique.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Cosmographie.

Mécanique.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XIX, 2ᵉ SÉRIE.)

Pages.

5869 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUPPLÉMENT

AU

TOME XIX. — ANNÉE 1880

(DEUXIÈME SÉRIE)

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES [1].

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE [2]].

Projections aphylactiques.

95. *Projection des cartes plates carrées* (Tableau XX). — Les méridiens sont représentés par des droites parallèles entre elles, les parallèles par d'autres droites perpendiculaires aux premières. L'équateur et les méridiens se trouvent développés en vraie grandeur.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

96. *Projection de Cassini.* — On peut la définir en remplaçant, dans la projection précédente, l'équateur et les parallèles par un méridien convenu et par les petits cercles qui ont leurs plans parallèles à celui de ce méridien.

Le même Tableau est applicable, pourvu qu'on y considère l comme représentant la distance sphérique d'un point quelconque du globe au méridien convenu.

97. *Projections des cartes plates parallélogrammatiques.* — Ces projections diffèrent de celle des cartes

---

[1] Pour ne pas fractionner encore cet important Mémoire de M. Tissot, ce que l'abondance des matières à insérer nous obligerait à faire, notre éditeur a bien voulu l'offrir en supplément aux abonnés des *Nouvelles Annales*. Nous l'en remercions ici bien vivement. CH. B.

[2] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1879.

plates carrées en ce que le degré de longitude, au lieu d'être pris égal à celui de l'équateur, est mesuré sur un parallèle déterminé. Comme exemple, nous avons choisi celle dans laquelle le degré de l'équateur de la carte est égal à celui du parallèle de 45 degrés sur le globe (Tableau XXI).

98. *Projection stéréographique à cylindre du P. Braun* (Tableau XXII). — Le canevas ne diffère de celui de la projection de Mercator que par les distances mutuelles des parallèles de la carte. Il résulte du développement d'un cylindre circonscrit au globe le long de l'équateur, et sur lequel on a pris la perspective de chaque point, le point de vue se déplaçant sur l'équateur de manière à se trouver toujours sur le méridien du point considéré, mais dans l'autre hémisphère.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

99. *Projection de Mercator modifiée du P. Braun* (Tableau XXIII). — On l'obtient en rapprochant du centre le point de vue de la projection stéréographique à cylindre de manière que sa distance à ce centre ne soit plus que 0,4 du rayon.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

100. *Développements coniques* (Tableaux XXIV). — On imagine un cône ayant pour axe la ligne des pôles, et on le développe. Les plans des méridiens et ceux des parallèles coupent le cône suivant des génératrices et suivant des circonférences, dont les transformées figurent les méridiens et les parallèles de la carte. Nous avons considéré quatre de ces projections : dans la première, le cône a son sommet au pôle et pour base l'équateur; dans la seconde, il passe par les parallèles

de 15 et de 75 degrés; dans la troisième, il est déterminé par les parallèles qui ont pour latitudes 22° 30′ et 67° 30′; enfin, dans la quatrième, il est circonscrit au globe le long du parallèle de 45 degrés. Si l'on fait successivement

$$n' = 0, \quad n' = \tfrac{1}{3}, \quad n' = \tfrac{1}{2}, \quad n' = 1,$$

on pourra définir les quatre développements en disant que le cône contient les deux parallèles qui ont, l'un pour latitude, l'autre pour colatitude $\frac{n'\pi}{8}$. Les quatre angles au sommet sont droits.

101. *Développements de perspectives épiconiques.* — On prend les perspectives des divers points de la surface terrestre sur un cône de révolution dont l'axe coïncide avec la ligne des pôles, le point de vue étant situé sur cette ligne, puis on développe le cône.

Dans les *développements de perspectives gnomoniques épiconiques,* le point de vue est au centre du globe. Le Tableau XXV se rapporte à celle de ces projections dans laquelle le cône est circonscrit à la sphère suivant le parallèle de 30 degrés de latitude; on a choisi l'échelle de manière que les surfaces se trouvent conservées sur l'équateur.

Dans la *projection stéréographique à cône* du P. Braun, le point de vue est placé à l'un des pôles et le cône est le même que celui de la projection précédente. Sur le parallèle de 30 degrés de latitude, il ne se produit pas d'altération. Sur l'équateur, on a

$$a = 1{,}098, \quad b = 0{,}804, \quad 2\omega = 17°50',$$

et au pôle,

$$a = 3, \quad b = 1{,}5, \quad 2\omega = 38°57'.$$

102. *Projection stéréographique méridienne mo-*

difiée (Tableaux XXVI). — Les parallèles de la carte se tracent comme ceux de la projection stéréographique méridienne; on obtient les méridiens en divisant la droite qui représente l'équateur en parties proportionnelles aux différences de longitude, puis en faisant passer des circonférences par les points de division et par les projections des deux pôles.

En chaque point, la plus grande altération d'angle ne dépend que de la longitude.

103. *Projection atractozonique* (Tableau XXVII). — Il est impossible de conserver partout les surfaces sur une projection dans laquelle les méridiens et les parallèles sont représentés par des cercles se coupant à angle droit; nous avons cherché à faire en sorte qu'il n'y ait d'altération ni dans les aires des zones comprises entre les parallèles, ni dans celles des fuseaux formés par les méridiens. Soit l' l'angle au centre de l'arc intercepté, sur la circonférence qui limite la carte de l'hémisphère, par la projection de l'équateur et celle du parallèle de latitude l; soit m' l'angle sous lequel se coupent la projection du méridien qui a pour longitude m et celle du premier méridien; l' et m' seront fournis par les deux équations

$$\sin 2l' - 2l' \cos 2l' = \pi \sin l \sin^2 l',$$

$$2m' - \sin 2m' = 2m \sin^2 m',$$

qu'il est facile de réduire en Tables. Nous donnons les valeurs de l' et m' qui correspondent à des latitudes et à des longitudes multiples de 15 degrés.

104. *Projection polyconique rectangulaire des Américains* (Tableaux XXVIII). — Le premier méridien et l'équateur sont développés en vraie grandeur suivant deux droites perpendiculaires entre elles. Chaque paral-

lèle est représenté par un cercle dont le centre se trouve sur la première de ces deux droites, et dont le rayon est égal à la génératrice du cône circonscrit à la Terre suivant le parallèle. Les méridiens de la Carte sont des trajectoires orthogonales des cercles ainsi obtenus. Ces conditions donnent, pour les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la carte,

$$x = l + \frac{m^2 \sin 2l}{4 + m^2 \sin^2 l}, \quad y = \frac{4m \cos l}{4 + m^2 \sin^2 l}.$$

Dans les projections aphylactiques qui ont été examinées jusqu'à présent, les méridiens et les parallèles de la carte se coupent à angle droit; il n'en sera plus de même dans les suivantes, si ce n'est dans les projections centrales sous l'aspect polaire, que nous étudierons en dernier lieu.

105. *Projection d'Apianus* (Tableaux XXIX). — Les parallèles de cette projection sont les mêmes que ceux des cartes plates. Le premier méridien est représenté par une droite, et celui qui limite l'hémisphère, par la circonférence décrite sur cette droite comme diamètre. Les autres demi-méridiens ont pour projections des arcs de cercle divisant l'équateur rectiligne de la carte en parties proportionnelles aux différences de longitude.

Les angles et les distances sont conservés le long de l'équateur.

Les deux Tableaux se rapportent au premier et au dernier méridien.

106. *Projection polyconique ordinaire des Américains* (Tableaux XXX). — Le premier méridien se développe en vraie grandeur suivant une droite. Les paral-

lèles de la carte sont des circonférences ayant leurs centres sur cette droite, et pour rayons les génératrices des cônes circonscrits au globe suivant les parallèles eux-mêmes. Sur ces circonférences on porte des longueurs égales aux arcs des parallèles terrestres, d'où résulte le tracé par points des projections des divers méridiens.

On a partout $k = 1$. Dans la représentation d'un hémisphère, le maximum de θ est $7°56'$; il a lieu pour $l = 41°41'$, $m = 90°$. Le minimum de b est 0,9844; il a lieu pour $l = 47°$, $m = 90°$.

107. *Projection de Loritz* (Tableaux XXXI). — Les méridiens sont ceux de la projection d'Apianus, et les parallèles, ceux de la projection orthographique.

Les altérations ont les mêmes valeurs pour tous les points de l'équateur.

108. *Projection de Nicolosi* (Tableaux XXXII). — Les méridiens sont ceux de la projection d'Apianus. Les parallèles sont aussi des circonférences; ces dernières passent par les points qui divisent le premier méridien et les deux demi-méridiens extrêmes en parties proportionnelles aux différences de latitude.

Soient Q la distance au centre de la carte du centre de l'une des circonférences qui forment le canevas, et R le rayon de cette circonférence, le rayon du méridien extrême étant pris pour unité : nous donnons les valeurs de Q et de R pour les parallèles de 5 en 5 degrés de latitude et pour les méridiens de 5 en 5 degrés de longitude, les valeurs de θ pour les points d'intersection de ces méridiens et de ces parallèles, enfin celles de h, de k et des éléments 2ω, a, b, S, (a), ω, mais de 15 en 15 degrés seulement.

109. *Projection de l'*Astronomie populaire *d'Arago*

(Tableaux XXXIII). — Les méridiens de la carte sont ceux de la projection de Mollweide, et les parallèles, ceux des cartes plates carrées.

Les rapports de surfaces sont indépendants des longitudes.

110. *Seconde projection du P. Fournier* (Tableaux XXXIV). — Les méridiens de la carte sont ceux qui ont été adoptés depuis par Mollweide. Les parallèles sont les mêmes que dans la projection orthographique.

Les rapports de surfaces ne dépendent que de la latitude.

Les altérations ont les mêmes valeurs pour tous les points de l'équateur.

111. *Première projection du P. Fournier* (Tableaux XXXV). — Le canevas est formé par les méridiens elliptiques de la projection précédente et les parallèles de celle de Nicolosi.

112. *Projection de Schmidt* (Tableaux XXXVI). — Les méridiens de la carte sont les ellipses des projections du P. Fournier. Pour tracer les parallèles, on divise les périmètres de ces ellipses en parties proportionnelles aux différences de latitude, et l'on joint, par un trait continu, les points de division correspondants.

Au centre de la carte, il n'y a pas d'altération.

113. *Projection polyconique équidistante.* — Le parallèle moyen et les méridiens de la carte se tracent comme dans la projection polyconique ordinaire. Sur chacun de ces méridiens, on prend ensuite, à partir du parallèle moyen, des longueurs égales aux arcs de méridien du globe, ce qui permet de construire les parallèles par points.

Si le pôle figure sur la carte, il y sera représenté, non par un point, mais par un arc de courbe.

114. *Projection de Guillaume Postel sur un méridien* (Tableaux XXXVII). — C'est la projection centrale dans laquelle les distances sphériques des petits cercles perpendiculaires à la verticale se trouvent conservées sur la carte. On y a, en chaque point,

$$b = 1, \quad S = a.$$

115. *Projection gnomonique méridienne* (Tableaux XXXVIII). — La projection gnomonique est la perspective prise du centre de la sphère, de sorte que tout grand cercle y est représenté par une droite.

116. *Perspective périmécoïque sur un méridien* (Tableaux XXXIX). — Nous avons trouvé que pour réduire à son *minimum* la plus grande altération de longueur dans la perspective d'un hémisphère, il faut placer le point de vue en dehors de l'hémisphère non représenté, et à une distance du centre égale au côté du décagone régulier étoilé inscrit dans un grand cercle.

117. *Projection de La Hire sur un méridien* (Tableaux XL). — C'est une perspective dans laquelle le point de vue se trouve en dehors de la sphère, et à une distance de la surface égale au sinus de 45 degrés.

118. *Perspective périhalique méridienne* (Tableaux XLI). — Nous avons trouvé que, pour réduire à son minimum la plus grande altération de surface dans la perspective d'un hémisphère, il faut placer le point de vue en dehors de l'hémisphère non représenté, et à une distance de la surface égale à 1,148, l'unité étant le rayon terrestre.

119. *Projection orthographique méridienne* (Tableaux XLII). — C'est la projection orthogonale ordinaire de la Géométrie descriptive.

On a, en chaque point,

$$a = 1, \quad S = b, \quad \Sigma = \beta.$$

Projections centrales.

120. *Projections de Lambert, de Guillaume Postel et de M. Airy* (Tableaux XLIII). — Nous avons dit que, pour étudier la déformation produite par les projections centrales, il suffit de les considérer sous l'aspect polaire. L'une d'elles conserve les angles : c'est la projection stéréographique ; une autre conserve les surfaces : c'est la projection de Lambert. Les Tableaux relatifs à ces deux dernières figurent déjà parmi ceux des projections autogonales ou parmi ceux des projections authaliques ; néanmoins nous les reproduisons ici afin de les rapprocher de ceux des autres projections centrales.

En laissant d'abord de côté les perspectives, nous avons à nous occuper de la projection authalique de Lambert, de la projection de Guillaume Postel et de la projection de M. Airy. Celle-ci est la seule dont nous n'ayons pas encore donné la définition : La circonférence qui représente le parallèle de colatitude δ y a pour rayon

$$\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} + 2\cot\frac{\delta}{2}\log\operatorname{séc}\frac{\delta}{2},$$

les logarithmes étant ceux du système népérien.

121. *Perspectives* (Tableaux XLIV). — Pour qu'une perspective se prête à la représentation d'un hémisphère tout entier, sans qu'il y ait recouvrement, il faut que le point de vue se trouve au delà du centre par rapport au

pôle de cet hémisphère. En le plaçant au pôle opposé, on obtient la projection stéréographique, qui conserve les angles. Si on l'écarte de cette position, soit en le rapprochant du centre, soit en l'éloignant dans le sens opposé, les altérations d'angles deviennent de plus en plus fortes, tandis que les altérations de surfaces augmentent dans le premier cas, et diminuent dans le second. A l'exception de la projection gnomonique, qui a un but spécial, nous devions donc nous borner à considérer les perspectives dans lesquelles le point de vue se trouve sur le prolongement du rayon mené au pôle de l'hémisphère non représenté. Chacune sera caractérisée par la distance correspondante, D, du centre au point de vue, distance que nous évaluerons en prenant le rayon pour unité. Les perspectives que nous avons étudiées sont les suivantes :

Projection gnomonique; $D = 0$.
Projection stéréographique; $D = 1$.
Projection du capitaine Clarke;

$$D = 1 + \frac{11}{30} = 1,3666\ldots$$

Projection de Sir Henri James; $D = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$.

Perspective qui correspond à $D = \frac{\pi}{2} = 1,57079\ldots$

Première projection de Parent; $D = 1,595$.
Perspective qui correspond à $D = 1,6$.
Perspective périmécoïque;

$$D = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1,6180\ldots$$

Projection de Lowry; $D = 1,69$.
Projection de La Hire; $D = 1 + \sin 45^\circ = 1,7071\ldots$

Deuxième projection de Parent ;

$$D = \sqrt{3} = 1,7321\ldots,$$

Perspective qui correspond à D = 2.
Perspective qui correspond à D = 2, 1.
Troisième projection de Parent ; D = 2, 105.
Perspective qui correspond à

$$D = 2 + \frac{1}{10}\sqrt{2} = 2,1414\ldots$$

Perspective périhalique ; D = 2, 148.
Perspective qui correspond à

$$D = 1 + \sqrt{3} = 2,7321\ldots.$$

Projection orthographique ; D = ∞.

Dans le dernier des Tableaux XLIV, δ_μ représente la valeur de δ pour laquelle S atteint son *maximum*, et S_μ la valeur de ce *maximum*.

La perspective périmécoïque diffère peu de celle qui correspond à D = 1,6.

On obtiendrait, sans erreur sensible, la perspective périhalique en plaçant le point de vue à une distance de la surface de la sphère égale au rayon augmenté de la dixième partie du côté du carré inscrit dans un grand cercle.

122. Les Tableaux XLV donnent, pour la projection centrale authalique de Lambert, pour la projection de Guillaume Postel, pour la projection stéréographique, pour la perspective périmécoïque et pour la perspective périhalique, les valeurs des éléments 2ω, a, b, S, etc.... qui correspondent à des colatitudes multiples de 5 degrés.

123. Les groupes de Tableaux I à XLV permettent d'étudier les déformations produites par les divers modes de

projection, de comparer ces modes de projection entre eux, enfin de choisir, suivant le but qu'on se propose, celui qu'il convient d'adopter pour la représentation d'un hémisphère. Nous reviendrons sur ce dernier point à la fin du Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

Résultats numériques relatifs aux cartes de portions du globe moindres qu'un hémisphère. — Choix d'un mode de projection.

Résultats numériques.

124. Les groupes de Tableaux I à XLV sont à la rigueur suffisants pour l'étude de la déformation produite par les divers modes de projection dans la représentation d'un hémisphère, car en général ils font connaître les éléments de cette déformation pour 145 points particuliers. S'il s'agit d'étudier un mode de projection en vue de la représentation d'une région de moindre étendue, on puisera, dans les mêmes Tableaux, les éléments de la déformation pour ceux d'entre les 145 points qui se trouveront situés à l'intérieur de cette région, et de cette manière on se procurera encore des notions précises sur la déformation produite; mais ici ces notions seront insuffisantes, parce qu'elles se rapporteront à des points relativement trop éloignés les uns des autres et trop éloignés aussi des limites de la région. Si nombreuses qu'elles soient, les valeurs que nous avons données précédemment et celles que nous leur ajouterons bientôt ne le sont donc pas encore assez, et il y aurait utilité à en calculer beaucoup d'autres. Le travail ne sera complet qu'autant que les résultats obtenus permettront de tracer

sur des cartes à grande échelle, et pour chaque mode de projection, des courbes d'égales altérations suffisamment rapprochées. A la fin du Chapitre, nous reviendrons sur la construction de ces cartes et l'usage que l'on peut en faire dans le choix d'un système de projection.

Nous avons dit que la plupart des projections étaient susceptibles d'être réparties en groupes dans lesquels elles se distinguent les unes des autres par les valeurs attribuées à un paramètre; chaque groupe comprend ainsi une infinité de projections, et il serait impossible d'effectuer pour toutes le travail que nous avons indiqué tout à l'heure; mais il suffira de considérer un certain nombre d'entre elles. On a vu par exemple, dans le groupe des perspectives, qu'il y avait lieu de se borner à celles pour lesquelles la distance du point de vue au centre de la sphère se trouve comprise entre deux limites assez voisines, et que les altérations ne variaient pas très rapidement avec cette distance.

Dans chaque groupe, il y a surtout intérêt à déterminer les projections qui sont périgonales, périmécoïques où périhaliques pour les cartes de certaines portions du globe, c'est-à-dire celles qui produisent sur ces cartes, pour les altérations d'angles, de longueurs ou de surfaces, des *maxima* moins élevés que les autres projections du même groupe. C'est ce que nous avons fait dans le Chapitre précédent pour la carte d'un hémisphère et ce que nous ferons dans celui-ci pour les cartes de zones d'une moindre étendue. Les solutions seront réunies en Tableaux ainsi que les altérations *maxima* correspondantes. D'autres Tableaux feront connaître les valeurs des éléments de la déformation, calculées de 5 en 5 degrés, pour un certain nombre des projections obtenues. Nous joindrons à ces renseignements quelques résultats numériques relatifs à d'autres projections.

125. *Projections coniques autogonales* (Tableaux XLVI). — Dans les projections autogonales à méridiens rectilignes ou à méridiens circulaires, nous avons désigné par n le rapport constant de l'angle de deux méridiens de la Carte à l'angle correspondant du globe (nº 75). Les valeurs $\frac{2}{3}$, 0,8 et 0,807 attribuées à n déterminent respectivement trois projections coniques autogonales qui sont périhaliques, et par conséquent aussi périmécoïques, pour les trois zones comprises, la première entre l'équateur et le parallèle de 75 degrés de latitude, la seconde entre les parallèles de 40 et de 65 degrés, la troisième entre les parallèles de 35 et de 70 degrés. Sur la carte de cette dernière zone, l'angle des demi-méridiens extrêmes est de 288 degrés et le parallèle le long duquel les altérations se trouvent nulles a pour latitude 53° 48′ 10″; nous avons donné dans le Chapitre III les nombres analogues relatifs aux deux autres zones.

126. *Projections autogonales à méridiens circulaires* (Tableaux XLVII). — On a vu (nº 76) que dans la représentation d'un hémisphère limité par un méridien. le rapport de longueurs et le rapport de surfaces augmentent avec la longitude. La manière dont ils varient avec la latitude sur le méridien rectiligne de la carte dépend de n : pour les valeurs de n non supérieures à un, a augmente de l'équateur au pôle; pour les quatre valeurs qui suivent dans celles que nous avons considérées, a augmente d'abord, puis diminue jusqu'à zéro; enfin, pour les six dernières, a diminue constamment de l'équateur au pôle. Si, dans la représentation de l'hémisphère, on fait abstraction des deux calottes sphériques que limitent les parallèles de 75 degrés de latitude, la plus faible valeur de a correspondra, dans les huit dernières

projections, à $l = 75$ degrés, $m = 0$; c'est pourquoi nous l'avons prise comme unité, et nous avons reproduit, avec cette modification, les huit dernières lignes des Tableaux VI.

127. *Projections cylindriques authaliques* (Tableaux XLVIII). — Nous considérons celles de ces projections qui sont périgonales pour les zones limitées par deux parallèles dont les latitudes l', l'' sont des multiples de 10 degrés inférieurs à 40 degrés. Nos Tableaux, qui sont à double entrée, donnent les valeurs correspondantes de n (n° 81), de $\frac{1}{n}$, de la latitude l_0 du parallèle le long duquel il n'y a pas d'altération, ainsi que les *maxima* de 2ω, de a, de (a) et enfin les *minima* de b, pour toute l'étendue de la carte. Ainsi qu'on pourra le voir par les Tableaux du numéro suivant, quelques-unes de ces projections sont moins avantageuses que les projections coniques authaliques; il en serait ainsi, à plus forte raison, pour des zones contenant des points situés à plus de 40 degrés de l'équateur.

128. *Projections coniques authaliques* (Tableaux XLIX). — Nous appelons δ', δ'' les colatitudes des parallèles extrêmes de la zone pour laquelle chaque projection est périgonale; δ_0 est celle du parallèle le long duquel ne se produit aucune altération. Le paramètre n est égal à $\cos^2 \frac{\delta_0}{2}$; il varie ici de 1 à $\frac{1}{2}$; les valeurs de $\frac{1}{n}$ qui correspondent à des zones à une seule base sont les mêmes que celles de (a) dans la première ligne ou dans la première colonne de l'avant-dernier Tableau. Le dernier Tableau se rapporte à quelques zones non comprises dans les Tableaux précédents.

129. *Projections tronconiques authaliques.* — Les plus grandes altérations d'angles et de longueurs sont les mêmes dans la projection tronconique authalique qui est périgonale pour la zone comprise entre les deux parallèles de colatitudes δ', δ'', et dans la projection conique authalique qui est périgonale pour la zone à une base limitée par le parallèle de colatitude $\delta'' - \delta'$. Nous renverrons donc ici, pour les valeurs *maxima* de a et de 2ω aux Tableaux qui ont été donnés à propos des projections coniques authaliques.

Dans la projection tronconique authalique qui est périgonale pour la zone comprise entre les parallèles de colatitude δ', δ'', le rapport a est égal à l'unité sur deux parallèles intermédiaires dont nous désignerons les colatitudes par δ_0 et δ_1; ce même rapport atteint sa plus grande valeur a_μ sur un parallèle dont la colatitude δ_μ est intermédiaire entre δ_1 et δ_0, et cette plus grande valeur est précisément égale à celle que prend a sur les deux parallèles extrêmes. Lorsque δ augmente de δ' à δ_0, a diminue de a_μ à l'unité; δ augmentant de δ_0 à δ_μ, a augmente de 1 à a_μ; δ augmentant de δ_μ à δ_1, a diminue de a_μ à l'unité; enfin, δ augmentant de δ_1 à δ'', a augmente de 1 à a_μ. La plus grande altération d'angle 2ω varie d'ailleurs dans le même sens que a, et son maximum $2\omega_\mu$ se produit en même temps que celui de a. Les colatitudes sont d'ailleurs comptées à partir de celui des deux pôles pour lequel $\delta' + \delta''$ est plus petit que π.

Le *maximum* a_μ est nécessairement moins élevé ici que dans la projection conique authalique qui serait périgonale pour la même zone, car, dans les projections tronconiques, on dispose de deux paramètres, savoir, le rapport constant n de l'angle de deux méridiens de la carte à celui des méridiens correspondants du globe, et le rayon ρ de la circonférence par un arc de laquelle le

pôle se trouve remplacé sur la carte. Les deux projections se confondent dans le cas seulement où la zone que l'on considère est à une base, c'est-à-dire pour $\delta' = 0$. Quand δ' et δ'' sont supplémentaires, c'est-à-dire quand les deux parallèles extrêmes sont égaux, la projection tronconique se transforme en une projection cylindrique authalique, savoir celle qui est périgonale pour la zone comprise entre l'équateur et l'un des deux parallèles. Voici quelques exemples.

Premier exemple.

$\delta' = 15^\circ$,	$\delta_0 = 25^\circ\ 3'20''$,	$n = 0,1736$,
$\delta'' = 145^\circ$,	$\delta_1 = 73^\circ 57' 30''$,	$\rho = 2,2054$,
$a_\mu = 1,538$,	$\delta_\mu = 65^\circ 44' 20''$,	$2\omega_\mu = 47^\circ 33'$.

Deuxième exemple.

$\delta' = 15^\circ$,	$\delta_0 = 19^\circ 50' 50''$,	$n = 0,6088$,
$\delta'' = 90^\circ$,	$\delta_1 = 73^\circ 55' 30''$,	$\rho = 0,3404$,
$a_\mu = 1,123$,	$\delta_\mu = 39^\circ 53' 10''$,	$2\omega_\mu = 13^\circ 14'$.

Troisième exemple.

$\delta' = 15^\circ$,	$\delta_0 = 18^\circ\ 6' 30''$,	$n = 0,8192$,
$\delta'' = 55^\circ$,	$\delta_1 = 46^\circ 32' 30''$,	$\rho = 0,1518$,
$a_\mu = 1,032$,	$\delta_\mu = 29^\circ 20' 30''$,	$2\omega_\mu = 3^\circ 34'$.

Quatrième exemple.

$\delta' = 55^\circ$,	$\delta_0 = 64^\circ 50' 0''$,	$n = 0$,
$\delta'' = 125^\circ$,	$\delta_1 = 115^\circ 10' 0''$,	$\rho = \infty$,
$a_\mu = 1,105$,	$\delta_\mu = 90^\circ\ 0' 0''$,	$2\omega_\mu = 11^\circ 25'$.

Comme les deux parallèles extrêmes sont également distants de l'équateur, on a ici une projection cylindrique.

Cinquième exemple.

$\delta' = 15^\circ$,	$\delta_0 = 19^\circ\ 4' 50''$,	$n = 0,7071$,
$\delta'' = 75^\circ$,	$\delta_1 = 62^\circ\ 1' 20''$,	$\rho = 0,8774$,
$a_\mu = 1,075$,	$\delta_\mu = 35^\circ 15' 50''$,	$2\omega_\mu = 8^\circ\ 14'$.

Sixième exemple.

$\delta' = 35^\circ$,	$\delta_0 = 42^\circ 37' 50''$,	$n = 0,3420$,
$\delta'' = 105^\circ$,	$\delta_1 = 92^\circ 57' 50''$,	$\rho = 1,5414$,
$a_\mu = 1,105$,	$\delta_\mu = 65^\circ 19' 20''$,	$2\omega_\mu = 11^\circ 25'$.

Quand on fait abstraction des terres situées au delà du 75e degré de latitude nord, la première des zones que nous venons de prendre comme exemples renferme tous les continents, la deuxième l'Asie, la troisième l'Europe, la quatrième l'Afrique, la cinquième l'Amérique du Nord et la sixième l'Amérique du Sud, les colatitudes étant comptées, pour cette dernière, à partir du pôle austral. Mais il est clair que, si l'on voulait appliquer les projections d'Albers à la représentation de l'Afrique ou à celle de l'une des deux Amériques, ce n'est pas à l'un des pôles géographiques qu'il faudrait placer le pôle de la projection; en choisissant convenablement ce dernier point on atténuerait notablement les valeurs des plus grandes altérations; seulement on ne pourrait les rendre que de très-peu inférieures à celles que produisent les projections coniques authaliques, ainsi qu'on s'en convaincra en examinant la forme de chacune des trois portions de la surface terrestre dont nous venons de parler.

130. *Projection dite de Bonne* (Tableau L).

131. *Projection polyconique ordinaire des Améri-*

ains. — Lorsqu'on l'applique à la carte de France, en prenant le méridien de Paris comme méridien moyen, on trouve que les plus fortes altérations se produisent vers l'île d'Ouessant (longitude 7°,5, latitude 48°,5). En ce point l'angle le plus altéré l'est de 13 minutes; la plus grande altération de longueur y est égale à 0,0038 ou $\frac{1}{266}$, et l'altération de surface y est représentée par le même nombre.

132. *Perspectives périmécoïques pour diverses zones à une seule base* (Tableau LI) — Nous donnons d'abord les distances D du point de vue au centre de la sphère pour les calottes dont les rayons sphériques, Δ, sont des multiples de 5 degrés, jusqu'à 50 degrés, puis les éléments de la déformation pour les perspectives qui correspondent aux rayons de 10, 20, 25, 30, 40 et 50 degrés.

133. *Perspectives périhaliques pour les mêmes zones* (Tableaux LII). — Dans le premier Tableau, δ_μ représente la distance polaire du parallèle sur lequel se produit le *maximum* S_μ de S.

Choix d'un mode de projection.

134. Certaines cartes construites en vue d'un but spécial exigent un mode de projection déterminé : ainsi, les conditions auxquelles doivent satisfaire les cartes marines ne se trouvent remplies que dans le système de Mercator; pour que les cartes de la Lune représentent cet astre tel que nous le voyons, il faut les tracer à l'aide de la projection orthographique; on aura recours à la projection gnomonique si l'on veut transformer en lignes droites toutes les circonférences de grands cercles. Dans

ces divers cas, on n'a pas à se préoccuper de choisir un mode de projection plutôt qu'un autre en vue de diminuer la déformation.

La plupart du temps, au contraire, une carte géographique n'a d'autre objet que de représenter assez fidèlement une portion de la surface terrestre; en adoptant un système de projection convenable, on peut alors atténuer les altérations dans certaines régions de la carte, ou bien les atténuer et même les détruire sur certaines lignes, ou bien encore faire en sorte qu'elles n'atteignent nulle part des valeurs trop considérables. Le choix dépendra de celles de ces conditions auxquelles on attribuera le plus d'importance; il variera nécessairement avec la forme et l'étendue de la contrée dont il s'agit de dresser la carte.

135. Supposons qu'on n'ait aucune raison d'atténuer la déformation en certains points plutôt que dans les autres, mais que l'on se propose d'abaisser la limite supérieure à laquelle elle peut atteindre; supposons de plus que la portion du globe à représenter soit un hémisphère entier. Les conditions ainsi énoncées excluent tout d'abord les projections dans lesquelles la circonférence de grand cercle qui limite l'hémisphère ne serait pas figurée sur la carte par la totalité d'un contour fermé; elles excluent entre autres les projections cylindriques et coniques, où certains points très-éloignés les uns des autres sur la carte correspondent à des points de la surface terrestre infiniment voisins. Cependant, bien que ramenée à des termes déjà plus précis, la question en comprend encore plusieurs autres : ou bien on voudra conserver les angles et réduire autant que possible la plus grande altération de surface; ou bien on voudra conserver les surfaces et réduire autant que pos-

sible la plus grande altération d'angle; ou bien enfin on voudra réduire autant que possible la plus grande altération de longueur.

136. Des projections autogonales connues, la projection stéréographique est la seule dans laquelle le rapport de longueurs, et par conséquent le rapport de surfaces, conservent partout des valeurs finies; elle répond donc seule à la question dans le premier des trois cas qui viennent d'être spécifiés.

137. Dans le second cas, il s'agit de projections authaliques. Imaginons que les dimensions du globe se trouvent réduites de manière que les aires mesurées sur la carte soient, non plus seulement proportionnelles, mais égales à celles des régions correspondantes, et prenons alors le rayon terrestre pour unité; l'aire totale de la carte sera mesurée par 2π, et son périmètre, d'après la propriété que possède le cercle de contenir la plus grande surface avec un contour de longueur donnée, sera au moins égal à la circonférence du cercle dont l'aire est 2π, c'est-à-dire à $2\pi\sqrt{2}$. D'après nos conditions, la totalité de la courbe qui forme ce périmètre remplace sur la carte une circonférence de grand cercle ayant pour longueur 2π; les rapports de longueurs suivant les directions des éléments de cette courbe sont donc tous égaux à $\sqrt{2}$, ou bien les uns sont plus petits et, par compensation, les autres plus grands que $\sqrt{2}$; dans tous les cas, il y a des points pour lesquels le demi-grand axe de l'ellipse indicatrice est au moins égal à $\sqrt{2}$, ce qui exige que le demi-petit axe soit au plus égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et que le rapport du premier au second soit au moins égal à 2; pour

$a = \sqrt{2}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la formule

$$\sin\omega = \frac{a - b}{a + b}$$

donnerait d'ailleurs

$$\sin\omega = \frac{1}{3},\quad \omega = 19^\circ 28' 16'',\quad 2\omega = 38^\circ 56' 33'';$$

ainsi le *maximum* de (a), c'est-à-dire le rapport de la longueur la plus amplifiée à la longueur la plus réduite ne peut être inférieur à 2, et la plus grande altération d'angle ne peut être inférieure à 38° 56′ 33″. Ces deux valeurs sont précisément les plus grandes que fournisse la projection centrale de Lambert, tandis que les autres projections authaliques non exclues jusqu'ici en fournissent de plus grandes encore. Actuellement, la projection centrale de Lambert est donc la seule qui réponde à la question, et même, quelles que soient les projections authaliques que l'on vienne plus tard à imaginer pour la représentation d'un hémisphère, aucune n'abaissera plus que celle-là les limites supérieures des altérations, tant que l'on s'astreindra à figurer par la totalité d'une courbe fermée la circonférence de grand cercle qui limite l'hémisphère.

138. Cette dernière condition subsiste encore dans le troisième cas que nous avons à considérer, mais il n'est plus nécessaire que le mode de projection soit ni autogonal ni authalique.

Quel que soit ce mode de projection, il est impossible que le rapport de la longueur la plus amplifiée ou la moins réduite à la longueur la plus réduite ou la moins amplifiée soit plus petit que $\frac{\pi}{2}$.

En effet, supposons que l'on ait diminué les dimensions du globe terrestre jusqu'à ce que son rayon soit

devenu égal à la plus courte distance de la projection du pôle de l'hémisphère au contour de la carte, et prenons cette distance comme unité. La portion de droite sur laquelle on la mesure est la projection d'une portion de courbe au moins égale en longueur au quart d'une circonférence de grand cercle, c'est-à-dire à $\frac{\pi}{2}$; le plus petit rapport de longueurs est donc au plus égal à $\frac{2}{\pi}$. D'un autre côté, le contour de la carte enveloppe la circonférence qui a pour centre la projection du pôle de l'hémisphère et pour rayon l'unité, à moins qu'il ne se confonde avec elle; sa longueur est donc au moins égale à celle de la circonférence de grand cercle dont il est la projection; par conséquent, le plus grand rapport de longueurs est au moins égal à 1. De là il résulte que la plus grande valeur de (a) est au moins égale à $\frac{\pi}{2}$, ainsi que nous l'avions annoncé. La projection de Guillaume Postel donne précisément $\frac{\pi}{2}$ pour la plus grande valeur de a dans la représentation d'un hémisphère, et partout b y est égal à 1, tandis que les autres projections nous ont donné pour la plus grande valeur de (a) des nombres plus grands que $\frac{\pi}{2}$. La projection de Guillaume Postel répond donc ici à la question, et même il serait impossible d'en imaginer une autre qui fournisse une valeur moindre pour la plus grande altération de longueur.

139. Il peut se faire que l'on désire obtenir une altération d'angle *maxima* plus petite que celle de la projection de Guillaume Postel en même temps qu'une altération de surface *maxima* plus petite que celle de la projection stéréographique, ou bien encore une altéra-

tion de surface *maxima* plus petite que celle de la projection de Guillaume Postel en même temps qu'une altération d'angle *maxima* plus petite que celle de la projection centrale de Lambert. Les projections qui remplissent l'une ou l'autre de ces deux conditions sont la projection de M. Airy, celle de Nicolosi et toutes les perspectives pour lesquelles le point de vue se trouve en dehors de la sphère à une distance de la surface moindre que le rayon. En consultant les Tableaux qui leur sont relatifs, on pourra trouver, dans la manière dont la déformation se répartit entre les diverses régions de l'hémisphère, des motifs d'adopter une de ces projections plutôt que les autres; mais, si l'on continue à considérer surtout les valeurs extrêmes des altérations, on devra rejeter la projection de Nicolosi ainsi qu'une partie des perspectives comme donnant à la fois, pour les trois sortes d'altérations, des *maxima* plus élevés que d'autres projections. Celles qui resteront sont la projection de M. Airy, les perspectives pour lesquelles la distance D du point de vue au centre est plus petite que 1,296, et celles pour lesquelles la même distance est comprise entre 1,360 et $\frac{\pi}{2}$ ou entre 1,645 et 2. Ces conclusions se trouvent justifiées par le Tableau suivant et par cette considération que, dans les perspectives pour lesquelles D est compris entre 1 et 2,148, la plus grande valeur de l'altération d'angle augmente, et la plus grande valeur de l'altération de surface diminue, à mesure que D augmente.

NOMS DES PROJECTIONS.	VALEURS MAXIMA DE		
	2ω.	(a).	S.
Projection stéréographique	0° 0'	2,000	4,000
Perspective (D = 1,296)	14.48	1,772	2,242
Projection de M. Airy	14.48	1,693	2,213
Perspective (D = 1,361)	17.36	1,735	2,211
Perspective $\left(D = \frac{\pi}{2}\right)$	25.39	1,637	1,706
Projection de G. Postel	25.39	1,571	1,571
Perspective (D = 1,646)	28.16	1,646	1,570
Projection de Nicolosi	32.47	1,787	1.571
Perspective (D = 2)	38.57	2,000	1,125
Projection centrale de Lambert	38.57	2,000	1,000

140. Ainsi qu'on devait le prévoir par des raisons de symétrie, les projections remplissant les conditions que nous nous étions imposées relativement à la déformation sont des projections centrales; elles remplacent les méridiens par des droites et les parallèles par des circonférences, lorsque le pôle de l'hémisphère à représenter se confond avec le pôle géographique; dans le cas contraire, les deux mêmes séries de lignes se trouvent figurées par des circonférences sur la projection stéréographique, et sur les autres, par des ellipses, des courbes du quatrième degré ou des courbes transcendantes. Nous avons indiqué autrefois ([1]) un procédé pour le tracé par points des méridiens et des parallèles d'une projection centrale, le canevas de la projection stéréographique servant de canevas auxiliaire; il serait plus commode et plus exact de faire usage de Tables donnant les coordonnées rectangulaires de chaque point de la carte d'après la longitude et la latitude du point correspondant du globe;

([1]) *Cosmos*, année 1865.

le calcul de ces Tables ne présente aucune difficulté. mais il est encore à faire, du moins en grande partie.

En chaque point d'une projection centrale, on peut obtenir immédiatement les directions des axes de l'ellipse indicatrice, puisque l'un d'eux se trouve sur la droite qui joint le centre de la carte au point considéré; quant à leurs longueurs, elles ne dépendent que de la longueur de cette droite et sont fournies par nos Tableaux. Il est donc facile, en partant des indications de la carte et en appliquant les propriétés du Chapitre I, de rétablir, soit graphiquement, soit par le calcul, les directions telles qu'elles émanent du point correspondant du globe, ainsi que les longueurs des arcs très-petits qui ont ce point pour origine. On pourra aussi tracer et déterminer en vraie grandeur le plus court chemin d'un point à un autre, pourvu qu'à la carte dont on fait usage on en joigne une autre construite d'après la projection gnomonique. Sur cette dernière, on tirera, entre les deux points, une ligne droite, que l'on décomposera en éléments assez petits; puis l'on mesurera chaque élément sur l'une ou l'autre projection en tenant compte des altérations éprouvées. La projection gnomonique exige quatre cartes pour la reproduction de la totalité de la surface terrestre.

141. Comme il y a peu d'intérêt à représenter les régions polaires exactement, il est permis de faire abstraction des points qu'elles renferment jusqu'à 15 degrés du pôle par exemple; au lieu d'un hémisphère limité par un méridien, on aura à considérer une portion du globe comprise entre ce méridien et deux moitiés des parallèles de 75 degrés de latitude. Au premier abord, il semble qu'en reprenant, dans ces conditions, la comparaison qui vient d'être effectuée, on sera conduit à choisir des modes de projection plus avantageux; un

examen attentif de nos Tableaux montre qu'il n'en est rien. En effet, la projection stéréographique méridienne modifiée donne seule alors une altération d'angle *maxima* moindre que celle de la projection centrale de Lambert, en même temps qu'un rapport *maximum* de surfaces moindre que celui de la projection stéréographique; mais ces deux *maxima* et celui de (a), qui ont respectivement pour valeurs 16° 19′, 2,524 et 2,023, sont tous trois plus élevés que ceux de la projection de M. Airy.

142. Nous avons exclu tout d'abord les projections coniques parce que, sur ces projections, les deux rayons qui limitent le secteur de la carte proviennent en réalité du dédoublement d'un même quart de circonférence de grand cercle, comme si l'on avait ouvert l'hémisphère suivant ce quart de circonférence; mais l'inconvénient occasionné par la séparation ainsi produite se trouvera bien amoindri si elle se trouve effectuée suivant un quadrant ne rencontrant aucune terre, ou du moins ne rencontrant que celles des zones glaciales. Cette condition est remplie par les deux quarts de méridien qui aboutissent au pôle antarctique en partant des deux points diamétralement opposés de l'équateur dont les longitudes comptées à partir du méridien de Paris, l'une à l'est, l'autre à l'ouest, sont respectivement de 70 et de 110 degrés; ces points sont d'ailleurs ceux que l'on place au centre sur les mappemondes ordinaires. L'un des deux quarts de méridien dont nous venons de parler se dirige dans l'océan Indien, et l'autre dans l'océan Pacifique; on effectuera la séparation suivant le premier pour l'hémisphère qui renferme l'ancien continent, l'Australie et les îles de la Sonde; on la fera suivant le second pour l'hémisphère occupé par le reste de l'Océanie et les deux Amériques. On pourra alors adopter un mode de pro-

jection beaucoup plus avantageux que les précédents, savoir la projection conique authalique répondant à $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Tableau XII), laquelle est périgonale, et par conséquent périmécoïque, pour un hémisphère. La plus grande valeur de a ne sera plus que $\sqrt[4]{2}$ ou 1,189; la plus petite valeur de b deviendra $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ou 0,841; le rapport de la longueur la plus amplifiée à la longueur la plus réduite sera donc $\sqrt{2}$ ou 1,414; enfin la plus grande valeur de $\sin \omega$ se réduira à $\tang^2 \frac{\pi}{8}$, ce qui correspond à $\omega = 9^\circ 53'$, $2\omega = 19^\circ 45'$.

Dans ce mode de projection, la carte de chaque hémisphère n'occupe plus un cercle entier, mais seulement un secteur de 255 degrés environ; les deux quarts d'équateur n'y sont pas dans le prolongement l'un de l'autre et font entre eux un angle d'un peu plus de 127 degrés; mais à cela il y a peu d'inconvénient, puisque le centre de la carte, où s'effectue la brisure, et pour lequel la loi de la déformation est ici en défaut, correspond à un point assez éloigné des continents.

Pour étudier la disposition mutuelle des quelques petites îles qui ont été disjointes, il suffirait de faire tourner, autour du centre, une portion de la carte, sans modifier en rien sa forme, jusqu'à ce que la réunion se trouve effectuée. Afin que l'on n'ait pas à faire cette rotation, le constructeur de la carte pourra utiliser le secteur de 105 degrés qui est resté vide en y représentant de nouveau, mais cette fois réunies, les parties qui ont été séparées, ou bien encore en prolongeant, de chaque côté, la carte déjà construite pour y ajouter celle d'un demi-fuseau de 60 à 70 degrés, lequel figurerait ainsi deux fois sur la carte totale.

La projection dont nous nous occupons ne produit aucune déformation à 65°,5 de distance du point central; de sorte qu'il y a, dans l'hémisphère oriental, un cercle traversant l'Afrique, l'Europe, l'Asie et l'Australie, tout le long duquel les altérations sont nulles; le cercle de l'hémisphère occidental, qui possède la même propriété, traverse les deux Amériques. Ainsi, non-seulement les altérations ne sont jamais considérables, mais le nombre des points importants où elles atteignent leurs plus grandes valeurs est très-restreint. On peut d'ailleurs les déterminer, comme dans les projections centrales, à l'aide de constructions géométriques et en corriger les angles ainsi que les longueurs. Elles sont les mêmes à des distances égales du centre. En joignant au centre un point quelconque de la carte, par une ligne droite, on obtient l'une des deux directions qui, partant de ce point, se coupent à angle droit sur la carte comme sur le globe; les déviations comptées à partir de l'une ou l'autre n'atteignent jamais 10 degrés. C'est aussi sur ces deux directions que se mesurent la longueur la plus amplifiée et la longueur la plus réduite, lesquelles, dans les cas les plus défavorables, ne diffèrent de la longueur vraie que de sa cinquième partie, ainsi que cela résulte des nombres que nous avons donnés tout à l'heure.

Au lieu d'adopter, pour n, la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou 0,707, on peut prendre, en nombre rond, $n = 0,75 = \frac{3}{4}$, ce qui rend la construction plus commode. On augmentera ainsi un peu les altérations sur les bords de la carte, mais on les diminuera vers le centre, c'est-à-dire dans la région où, d'après le Tableau XII, elles varient le plus lentement. Le petit cercle lieu des points d'altérations nulles n'aura plus que 60 degrés de rayon sphérique et

divisera les continents en parties plus égales. L'angle du secteur resté vide sera réduit à 90 degrés, et les deux moitiés de l'équateur de la carte feront entre elles un angle un peu plus obtus. On aura d'ailleurs, pour les plus grandes valeurs de a, (a) et ω : au centre de la carte,

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155, \quad (a) = \frac{4}{3} = 1,333,$$

$$\sin\omega = \frac{1}{7}, \quad \omega = 8^\circ 13', \quad 2\omega = 16^\circ 26';$$

sur les bords,

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225, \quad (a) = \frac{3}{2} = 1,500,$$

$$\sin\omega = \frac{1}{5}, \quad \omega = 11^\circ 32', \quad 2\omega = 23^\circ 4'.$$

143. La projection conique autogonale qui correspond à $n = \frac{2}{3}$ et la projection tronconique authalique qui correspond à $n = 0,609$, $\rho = 0,3404$ seraient celles qu'il conviendrait d'adopter si l'on voulait représenter un hémisphère limité par l'équateur, en ne tenant pas compte des déformations produites au delà du parallèle de 75 degrés de latitude. La première donnerait 1,275 pour le plus grand rapport de longueurs, et 1,624 pour le plus grand rapport de surfaces; la seconde donnerait 13° 14′ pour la plus grande altération d'angle et 1,123 pour le maximum de (a). Les limites des altérations se trouveraient ainsi moindres que dans la représentation d'un hémisphère sur un méridien. Mais cette combinaison présenterait le grave inconvénient de séparer sur les mappemondes les deux parties de l'Afrique, ainsi que les deux parties de l'Amérique, situées au nord et au sud de l'équateur.

144. Au lieu d'un hémisphère entier, considérons maintenant une zone à une base limitée par un petit cercle. Il est clair que les projections les plus avantageuses se trouveront parmi les projections centrales. La projection stéréographique sera encore celle des projections autogonales qui réduira le plus possible les plus grandes altérations de longueur et de surface; la projection centrale de Lambert sera celle des projections authaliques qui réduira le plus possible les plus grandes altérations d'angle et de longueur, à moins que l'on ne se décide à ouvrir la zone et à la représenter par la projection conique authalique qui est périgonale pour cette zone; enfin la projection de Guillaume Postel réduira à son minimum la plus grande altération de longueur. A ces projections on pourra joindre celle de M. Airy ainsi que des perspectives, qui ne seront pas les mêmes que celles auxquelles nous avons été conduits lorsqu'il s'agissait d'un hémisphère entier, mais pour lesquelles les limites des distances du point de vue au centre de la sphère se détermineront d'une manière analogue. Nous avons pris comme exemples les trois zones à une base dont les rayons sphériques sont de 25, 40 et 50 degrés; on verra tout à l'heure pourquoi ce sont celles-là que nous avons choisies. Dans le tableau qui leur est relatif, figurent les projections qui viennent d'être citées, sauf celle de M. Airy et les perspectives; nous y avons fait aussi entrer les perspectives qui sont périmécoïques et celles qui sont périhaliques pour les trois zones; on remarquera que, dans les premières, les altérations *maxima* diffèrent à peine de celles de la projection de Guillaume Postel, et, dans les trois autres, de celles de la projection centrale de Lambert.

NOMS DES PROJECTIONS.	PREMIÈRE ZONE. Rayon de 25 degrés.			DEUXIÈME ZONE. Rayon de 40 degrés.			TROISIÈME ZONE. Rayon de 50 degrés.		
	MAXIMA DE								
	2ω	(a)	S	2ω	(a)	S	2ω	(a)	S
Projection stéréographique.....	0° 0'	1,049	1,101	0° 0'	1,132	1,282	0° 0'	1,217	1,482
Projections coniques authaliques périgonales................	1.22	1,024	1,000	3.34	1,064	1,000	5.38	1,103	1,000
Projection de Guillaume Postel.	1.50	1,032	1,032	4.44	1,086	1,086	7.27	1,139	1,139
Perspectives périmécoïques....	1.50	1,033	1,033	4.47	1,087	1,087	7.36	1,142	1,142
Projection centrale de Lambert..	2.45	1,049	1,000	7. 7	1,132	1,000	11.15	1,217	1,000
Perspectives périhaliques	2.46	1,050	1,001	7.14	1,135	1,003	11.33	1,224	1,008

L'Europe, moins une partie du Spitzberg et de la Nouvelle-Zemble, est comprise à l'intérieur d'une calotte sphérique ayant son pôle aux environs de Plock en Po-

logne, et dont le rayon est de 25 degrés; les nombres des trois premières colonnes lui sont donc applicables. La même partie du monde est aussi comprise dans la zone limitée par les parallèles de 35 degrés et de 75 degrés de latitude, ce qui permet d'en construire la carte à l'aide de la projection conique autogonale qui est périhalique pour cette zone, ou encore à l'aide de la projection tronconique authalique qui est périgonale pour ladite zone; mais ces deux projections conduisent à des altérations *maxima* respectivement plus fortes que celles de la projection stéréographique et que celles de la projection conique authalique qui figure dans le Tableau.

Le rayon sphérique de la calotte la moins étendue qui contienne l'Asie est de 50 degrés; les nombres des trois dernières colonnes font donc connaître les plus grandes altérations produites sur la carte de cette partie du monde par les six projections.

Pour l'Afrique et pour l'Amérique septentrionale, c'est aux quatrième, cinquième et sixième colonnes qu'il faut se reporter, car les deux calottes sphériques correspondantes ont l'une et l'autre 40 degrés de rayon.

Pour l'Amérique du Sud, le rayon de la calotte est de 33 degrés, ce qui conduit à des altérations intermédiaires entre celles des trois premières colonnes et celles des trois suivantes; avec la projection stéréographique, par exemple, le plus grand rapport de longueurs est 1,088, et le plus grand rapport de surfaces 1,183.

Appliquées à la carte d'Afrique et à celle de l'Amérique du Sud, les projections coniques authaliques périgonales ne présenteraient pas, comme sur celles d'Europe et d'Asie, l'inconvénient de disjoindre des points qui se touchent sur la surface terrestre, et produiraient des

altérations moindres que celles de la projection centrale de Lambert. Pour l'Afrique, on placerait près de la côte du Gabon le pôle de la calotte sphérique, dont on porterait le rayon à 42 ou 43 degrés, et l'on effectuerait la séparation suivant l'arc d'équateur qui se dirige dans l'océan Atlantique. Pour l'Amérique méridionale, on donnerait 37 degrés de rayon à la calotte sphérique, et l'on séparerait suivant un arc de grand cercle dirigé dans l'océan Pacifique. On pourrait même diminuer encore les altérations, mais cette fois de quantités assez faibles, en substituant les projections tronconiques aux projections coniques.

La projection de Bonne serait beaucoup moins avantageuse que celles du Tableau précédent pour les cartes des mêmes régions. On peut s'en convaincre par un coup d'œil jeté sur les nombres ci-dessous, que nous avons cependant déterminés en adoptant les méridiens et les parallèles moyens les plus favorables.

Projection de Bonne.

RÉGIONS.	MAXIMA DE		
	2ω.	(a).	S.
Europe	6°,23′	1,118	1,000
Asie	26,10	1,585	1,000
Afrique	12,28	1,244	1,000
Amérique du Nord	22,34	1,487	1,000
Amérique du Sud	8,16	1,155	1,000

145. Les projections que nous avons considérées dans le numéro précédent ne sont pas celles qui abaissent le plus possible les limites des altérations sur les cartes

d'Europe, d'Asie, d'Afrique, etc., parce que ces régions sont loin d'occuper entièrement les plus petites zones à une base qui les contiennent. Si l'on veut trouver, pour chacune de ces cartes ou pour celle d'un pays quelconque, les systèmes qui remplissent les conditions énoncées, il faudra avoir recours au procédé que nous allons expliquer maintenant.

Il n'est pas de mode de projection pour lequel on ne puisse dessiner sur le globe le contour d'une région à la représentation de laquelle il s'adapterait mieux que tous les autres; aucun de ceux qui ont été proposés jusqu'à présent ne doit donc être exclu *a priori;* seulement beaucoup pourront l'être à la suite d'un examen rapide dans lequel on aura eu égard, en consultant nos Tableaux, à la forme et à l'étendue de la contrée dont il s'agit de construire la carte. Dans cet examen préalable et dans la comparaison que l'on devra effectuer ensuite entre les systèmes non rejetés, on ne devra pas perdre de vue la remarque suivante.

Chaque système de projection est susceptible d'en engendrer une infinité d'autres, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte par un exemple. Considérons la projection de Lagrange, qui conserve les angles, et qui jouit de la propriété qu'à partir d'un certain point de l'équateur les altérations y varient moins rapidement, sur cette ligne et sur le méridien, que dans les autres projections autogonales à méridiens circulaires. Il est facile d'imaginer un autre système remplissant des conditions analogues et possédant la même propriété par rapport à un autre point de la sphère et à deux grands cercles quelconques se coupant à angle droit; le pôle de l'un de ces deux grands cercles remplacera ici le pôle géographique, et les formules qui donnaient, dans le premier cas, les coordonnées des divers points de la carte s'appliqueront

aussi au second, pourvu qu'on y remplace la longitude et la latitude par deux nouvelles variables qui en seront des fonctions connues. En déplaçant les deux grands cercles, on obtiendra une infinité de modes de projection fournissant des valeurs différentes, pour les limites des altérations, dans la représentation d'une seule et même contrée. Comme autre exemple, on peut citer la projection stéréographique, qui, suivant qu'on l'effectue sur l'horizon d'un lieu ou sur celui d'un autre lieu, donne à la carte d'un même pays des aspects différents.

Nous avons déjà parlé de cartes sur lesquelles seraient tracées, pour les divers systèmes de projection, des courbes suffisamment rapprochées d'égales altérations ou de *maxima* égaux d'altérations. Pour les projections autogonales, chaque courbe serait le lieu des points où le rapport de surfaces prend une valeur donnée; pour les projections authaliques, ce serait le lieu des points où la plus grande altération d'angle atteint une limite donnée; pour chaque projection aphylactique, il serait utile qu'il y eût quatre séries de courbes, dont deux se rapporteraient aux éléments qui viennent d'être mentionnés, et les deux autres aux axes de l'ellipse indicatrice. Les cartes pourraient être construites d'après la projection centrale de Lambert; quant aux courbes, on les tracerait, en partant de leurs équations, qu'il est facile de former, ou mieux en renversant la question et calculant, pour beaucoup plus de points que nous n'avons pu le faire, les éléments de la déformation.

L'emploi de ces cartes conduirait, dans chaque cas particulier, à la solution du problème qui nous occupe, et l'on comprend qu'il suffit d'en avoir une seule pour tous les systèmes de projection qui se déduisent les uns des autres par le mode de génération qui a été expliqué tout

à l'heure. Imaginons en effet une carte auxiliaire de la contrée tracée aussi d'après la projection centrale de Lambert, et plaçons-la, par exemple, sur la feuille où sont dessinées les courbes d'égales altérations de la projection de Lagrange; en la faisant glisser et tourner sur cette feuille, on arrivera à lui donner une position dans laquelle le *maximum* d'altération indiqué sera moindre que dans toute autre. On relèvera alors, sur la carte mobile, la longitude et la latitude du point d'intersection des deux droites de la carte fixe qui représentent l'équateur et le méridien moyen de cette dernière ; on mesurera aussi l'azimut de l'une de ces droites par rapport au méridien de la carte mobile, et on le corrigera de la déviation occasionnée par la projection de Lambert. On obtiendra ainsi les éléments propres à caractériser celui des systèmes dérivés de la projection de Lagrange qui atténue le plus le *maximum* d'altération dans la représentation de la contrée donnée. On opérera de même pour les autres projections autogonales, et l'on arrivera ainsi à connaître celle qui correspond à la plus petite valeur du *maximum* de l'altération de surface, et par conséquent aussi du *maximum* de l'altération de longueur.

Un procédé analogue appliqué aux projections authaliques donnera celle qui correspond aux plus petites valeurs des *maxima* des altérations d'angles et de longueurs. On l'appliquera aussi aux projections aphylactiques, afin de reconnaître celles qui produisent en même temps un *maximum* d'altération d'angle et un *maximum* d'altération de surface respectivement moindre que les plus faibles qui aient été obtenus par les projections authaliques et par les projections autogonales. On déterminera en particulier la projection aphylactique qui réduit le plus possible la plus grande altération de longueur;

ici, les recherches s'effectueront à l'aide des courbes relatives aux axes des ellipses indicatrices, et il pourra y avoir quelque tâtonnement provenant de ce que l'élément à considérer est le rapport de la plus forte valeur du grand axe, pour toute l'étendue de la carte, à la plus faible valeur du petit axe, lorsque la moitié de cette dernière est différente de l'unité.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 01139 5343

